

이학석사학위논문

맷음변수 강제 감쇠 혼들이에서
혼돈전이

이 기 진

강원대학교 대학원

1996년 2월

김 상 윤 교수지도
이학석사학위논문

매트임변수 강제 감쇠 흔들이에서
혼돈전이

Transition to chaos in a parametrically forced damped
pendulum

강원대학교 대학원

물리학과 물리전공

이 기 진

이기진의 석사학위논문
합격으로 판정함

1995년 12월

심사위원장 김 상 윤



위 원 김 재 구



위 원 신 승 호



감사의 글

대학원에 진학하여 본 논문이 완성될 때까지 학문적으로나 학문 외적으로 상당히 많은 가르침을 주시고 안일한 사고방식과 나태한 생활에서 벗어날 수 있도록 이끌어주신 김 상 윤 교수님께 진심으로 감사를 드립니다. 그리고 부족한 논문을 심사하시느라 애쓰신 김 재 구 교수님과 신 승 호 교수님께도 감사의 마음을 드립니다. 또한, 연구 도중 어려울 때마다 힘이 되어주고 격려를 아끼지 않았던 선배님들, 동료, 후배들에게 따뜻한 감사의 마음을 전합니다.

항상 염려와 온정으로 지켜봐 주신 가족들과 대학원 과정을 무사히 마칠 수 있도록 물심양면으로 뒷바라지 해주신 어머니께 사랑하는 제 마음을 바칩니다. 그리고 병석에 계시면서 돌아가시는 날까지 늘 제 걱정을 하신 아버지께 바쁘다는 핑계로 자주 찾아뵙지 못한 이 죄인이 용서를 구합니다.

맷음변수 강제 감쇠 흔들이에서 혼돈전이

이기진

강원대학교 대학원 물리학과

초 록

맷음변수 강제 감쇠 흔들이(parametrically forced damped pendulum)에서 ω_0 (자연 진동수)와 A (외부구동력 진폭)를 변화시키면서, 평형점의 안정성에 연관된 쌍갈림(bifurcation) 현상에 대해 연구했다. 임의의 ω_0 에서 A 를 증가시켜 가면 평형점은 안정성을 잃어버린 후에 다시 되찾는 과정을 무한히 반복한다. 이 평형점은 처음에는 ω_0 에 따라서 초임계(supercritical) 또는 버금임계(subcritical) 쌍갈림을 통해서 불안정해진다. 그러나, A 를 더 증가시키면 평형점은 번갈아 일어나는 초임계 주기배가(period-doubling)와 갈퀴(pitchfork) 쌍갈림을 통해서 불안정해진다. 반면에, 이것의 안정성 회복은 번갈아 일어나는 버금임계 주기배가와 갈퀴 쌍갈림을 통해서 일어난다. 각 초임계 쌍갈림인 경우에 A 가 증가함에 따라 혼돈에 이르는 무한연속 주기배가가 뒤따라 일어난다. 따라서, A 를 증가시켜 가면 이러한 주기배가를 통한 혼돈전이가 무한히 반복해서 일어난다. 그리고 혼돈전이점에서의 임계거동 또한 연구하였다.

목 차

감사의 글	iii
초록	iv
목차	v
I. 서론	1
II. 푸앵카레 본뜨기에서 주기궤도의 안정성, 쌍갈림 및 리아프노프 지수	3
III. 다중 주기배가 혼돈전이	9
IV. 주기배가 쌍갈림의 임계거동	20
V. 요약	25
참고문헌	26
영문초록	28

I. 서론

질량을 무시할 수 있고 길이가 l 인 막대 끝에 질량 m 인 물체가 달려있는 흔들이에 진폭이 a 이고 진동수가 1인 외부구동력 $h(t)$ 를 가했을 때 일어나는 다양한 동역학적 현상들에 대해 탐구하였다. 그림 1에서처럼 지지점 S 를 원점 O 에 대해 수직으로 진동하도록 외부구동력을 가하면 흔들이의 자연 진동수가 시간에 따라 주기적으로 변하게 된다. 따라서 이러한 흔들이를 맺음변수 강제 감쇠 흔들이라고 부른다 [1-3]. 이 맺음변수 강제 감쇠 흔들이의 운동 방정식은 다음과 같다:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + (\omega_0^2 - A \cos t) \sin \theta = 0. \quad (1)$$

여기서 θ 는 각위치이고, γ 는 감쇠계수이고, $\omega_0 (= \sqrt{g/l})$ 는 비감쇠 자연 진동수이며, $A = a/l$ 이다. 식 (1)에서 $\theta \rightarrow 2\pi x$, $t \rightarrow 2\pi t$ 로 치환하면 다음과 같이 된다 [1-3]:

$$\ddot{x} + 2\pi\gamma\dot{x} + 2\pi(\omega_0^2 - A \cos 2\pi t) \sin 2\pi x = 0. \quad (2)$$

여기서 역학 변수 x 와 맺음변수 γ , ω_0 와 A 는 무차원이다.

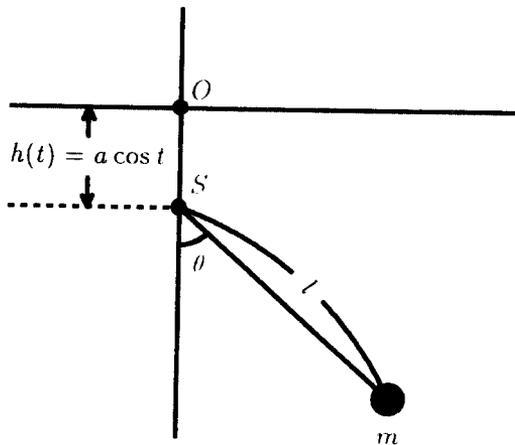


Fig. 1. A parametrically forced damped pendulum.

맷음변수 강제 감쇠 흔들이는 간단해 보이지만 매우 다양한 동역학적 거동을 보여준다. 진폭 A 를 적당한 값까지 증가시켜 가면, 주기적인 끌개(periodic attractor)에서 혼돈 끌개(chaotic attractor)로의 전이, 서로 다른 종류의 끌개의 공존, 과도적 혼돈(transient chaos) 등이 수치적으로 [4-6] 그리고 해석적으로 [7] 이미 발견되어졌다. 또한 이러한 현상들은 실험 [8,9]에서도 관찰됐다. 그러나 A 를 좀 더 증가시켜 가면 이전의 연구에서 볼 수 없었던 새로운 흥미로운 동역학적 거동이 나타난다.

이런 맷음변수 강제 감쇠 흔들이에서 평형점 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ 의 안정성에 연관된 쌍갈림 현상에 대해 주된 관심을 두고 연구했다. 평형점의 선형 안정성은 다음과 같은 감쇠 Mathieu 방정식으로 알려진 선형 방정식에 의해 결정된다:

$$\ddot{x} + 2\pi\gamma\dot{x} + 4\pi^2(\omega_0^2 - A \cos 2\pi t)x = 0. \quad (3)$$

$\gamma = 0$ 인 비감쇠 경우에, Mathieu 방정식의 안정성은 알려져 있다 [10,11]. $\omega_0 - A$ 평면에서 평형점의 불안정한 영역은 불연속적으로 무한히 많이 존재한다. 이러한 영역은 혀(tongue)의 모양과 닮았기 때문에 “혀”라 불린다 (참고문헌 [11]의 그림 7-5를 보시오). 또한 $(\omega_0, A) = (\frac{n}{2}, 0)$ 에서 맷음변수 공명이 일어나므로, 각 혀는 정수 n 으로 순서대로 표기할 수 있다. 그러나 $\gamma \neq 0$ 인 감쇠 경우에는 n 번째 맷음변수 공명이 일어나기 위해선 0보다 큰 문턱값(threshold value) $A_t(n)$ 이 필요하다 [1-3]. n 을 점차 증가시켜 가면 $A_t(n)$ 의 값은 급격히 증가한다(참고문헌 [2]의 그림 100을 보시오).

II절에서는 우선 푸앵카레 본뜨기(Poincaré map)를 도입한 후에 주기궤도의 안정성과 관련된 다양한 쌍갈림에 대하여 논의한다. III절에서는 $\gamma = 0.1$ 인 경우에 A 를 충분히 큰 값으로 증가시킬 때 나타나는 평형점의 안정성과 연관된 쌍갈림 현상에 대해 탐구한다. 감쇠 Mathieu 방정식 (3)에서는 안정한 A 영역과 불안정한 A 영역이 무한히 번갈아 나타난다. 즉, A 를 증가시켜 가면, 평형점은 불안정해진 후에 다시 안정성을 회복하는 “부활(resurrections)” 현상을 반복한다. 이 평형점이 처음에는 ω_0 에 따라서 초임계 또는

버금임계 쌍갈림을 통해서 불안정해지지만, 그 후부터는 버금임계 주기배가와 같귀 쌍갈림을 번갈아 하면서 안정성을 회복하고, 초임계 주기배가와 같귀 쌍갈림을 번갈아 하면서 불안정해지는 과정을 반복하게 된다. 또한 각 초임계 쌍갈림인 경우에 혼돈에 이르는 무한연속 주기배가가 뒤따라 일어난다. 따라서, A 를 증가시켜 가면 주기배가를 통한 혼돈 전이가 무한히 반복해서 일어난다. 이것은 오직 한번 주기배가를 통해 혼돈전이 하는 1차원 본뜨기와 다른 감쇠 강제 흔들이 경우 [12]와 대조된다. 그리고 IV절에서는 임계점에서의 임계 축척 거동을 논의하고, 마지막으로 V절에서 결론을 내린다.

II. 푸앵카레 본뜨기에서 주기궤도의 안정성, 쌍갈림 및 리아프노프 지수

이 절에서는 우선 플로케 이론(Floquet theory)을 써서 맺음변수 강제 감쇠 흔들이의 푸앵카레 본뜨기에서 주기궤도의 안정성을 논한다. 그리고 난 다음에 그 안정성과 연관된 쌍갈림들과 리아프노프 지수(Lyapunov exponent)를 논한다.

2차 상미분 방정식 (2)를 다음과 같은 두개의 1차 상미분 방정식으로 표현할 수 있다:

$$\dot{x} = y, \tag{4a}$$

$$\dot{y} = -2\pi\gamma y - 2\pi(\omega_0^2 - A \cos 2\pi t) \sin 2\pi x. \tag{4b}$$

어떤 역학변수 초기값 $z_0[\equiv (x(0), y(0))]$ 에 연속적으로 푸앵카레 본뜨기를 가하면 이산 시간 $t = m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)에서의 역학변수 z_m 을 얻어낼 수 있다. 그리고 z_m 이 (단위 시간) 푸앵카레 본뜨기를 통해 z_{m+1} 이 되는 것을 $z_{m+1} = P(z_m)$ 로 표기한다.

푸앵카레 본뜨기 P 는 반전대칭성(inversion symmetry)을 가진다:

$$SPS(z) = P(z). \tag{5}$$

여기서 $z = (x, y)$ 이며, S 는 원점에 대한 반전이다 ($S(z) = -z$). P 의 궤도 $\{z_m\}$ 이 S 에

대해 불변이면 대칭궤도라 한다. 반면에, 서로 다른 궤도일 경우 비대칭 궤도라 부르며, 이 경우 서로가 “공약” 궤도가 된다.

주기 q 인 궤도($P^q(z_0) = z_0, P^j(z_0) \neq z_0, 1 \leq j \leq q-1$)의 안정성에 대해 분석해 보자. 여기서 P^k 는 k 번 푸앵카레 본뜨기한 것을 의미한다. 주기궤도의 선형 안정성은 P^q 를 궤도점 z_0 에 대해 선형화한 행렬 $DP^q(z_0)$ 에 의해서 결정된다. 여기서 행렬 DP^q 는 플로케 이론을 적용해서 미소 섭동에 대한 선형화된 방정식을 한 주기 동안 적분하면 구할 수 있다 [13].

주기 q 인 궤도에 대응하는 닫힌 궤도상의 해를 $z^*(t) = z^*(t+q)$ 라하고, 이 궤도에 미소 섭동 $(\delta x(t), \delta y(t))$ 를 가해 닫힌 궤도의 안정성을 분석한다. 식 (4)를 이 닫힌궤도에 대해 선형화 하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = J(t) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$J(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4\pi^2(\omega_0^2 - A \cos 2\pi x^*(t)) & -2\pi\gamma \end{pmatrix}. \quad (7)$$

여기서 J 는 주기 q 인 2×2 행렬이다. 서로 독립적인 세로줄 벡터 $w^1(t)$ 와 $w^2(t)$ 로 이루어진 행렬 $W(t) = (w^1(t), w^2(t))$ 를 식 (6)의 기본 해 행렬(fundamental solution matrix)이라 하면, 주기 q 인 계의 일반 해는 다음과 같은 형태로 주어진다:

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix} = W(t) \begin{pmatrix} \delta x(0) \\ \delta y(0) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

여기서 $W(0)$ 는 2×2 단위행렬 I 이다. 결과적으로 행렬 DP^q 를 구하는 문제는 행렬 $W(q)$ 를 구하는 문제와 같음을 식 (8)로부터 알 수 있다. 식 (8)을 식 (6)에 대입해서 정리하면 다음과 같이 된다:

$$\dot{W}(t) = J(t)W(t), \quad W(0) = I. \quad (9)$$

식 (9)를 한 주기 동안 적분하면 행렬 $M \equiv DP^q$ 를 구할 수 있다.

행렬 M 의 고유값들(λ_1, λ_2)를 안정성 승수(stability multipliers)라 부르며, 이 안정성 승수들을 통해 안정성을 분석할 수 있다. 그리고 안정성 승수들은 M 의 특성방정식으로부터 구해진다:

$$\lambda^2 - \text{tr}M \lambda + \det M = 0. \quad (10)$$

여기서 $\text{tr}M$ 과 $\det M$ 은 M 의 궤적(trace)과 행렬식(determinant)이다. 그리고 $\det M$ 은 다음과 같은 공식으로 구해진다 [14]:

$$\det M = e^{\int_0^q \text{tr} J dt} \quad (11)$$

이 식에 $\text{tr}J = -2\pi\gamma$ 를 대입하면 다음과 같이 된다:

$$\det M = e^{-2\pi\gamma q}. \quad (12)$$

따라서, 푸앵카레 본뜨기 P 는 헤논 본뜨기(Hénon map) [15] 경우와 같이 야코비안 행렬식(Jacobian determinant) 값이 상수인 2차원 홀어지기 본뜨기이다.

주기 궤도의 안정성 승수들은 복소평면에서 반경이 $e^{-\pi\gamma q}$ 인 원이나 실수축 위에 존재한다. 이 안정성 승수들이 단위원(unit circle) 안에 존재할 때 주기궤도는 안정하다. 위 푸앵카레 본뜨기 P 에서 주기궤도의 안정성 승수들이 단위원 밖으로 벗어날 수 있는 경로는 실수축 외에는 없으므로 Hopf 쌍갈림은 일어날 수 없다. 따라서, 주기궤도의 안정성은 실수축상에서 어떤 안정성 승수가 -1 보다 작거나 1 보다 커질 때 잃어버리게 된다.

상수 야코비안 행렬식 값을 갖는 2차원 홀어지기 본뜨기에서 주기궤도의 안정성을 분석하기 위해서, 다음과 같이 정의된 좀 더 편리한 실수양 R 이 도입되었다 [16].

$$R \equiv \frac{1 + \det M - \text{tr}M}{2(1 + \det M)}. \quad (13)$$

여기서 R 은 유수(residue)라고 부른다. 주기궤도는 $0 < R < 1$ 구간에서 안정하고, 양 끝 점 $R = 0$ 과 1 에서 안정성 승수들은 각각 1 과 -1 이 된다. R 이 0 과 1 에서 주기궤도는 불안정해지면서 여러 가지 쌍갈림을 하게 된다.

R 이 0 보다 작아지면 안장 마디(saddle-node) 쌍갈림, 넘김고비(transcritical) 쌍갈림, 초임계 또는 버금임계 갈퀴 쌍갈림 등이 일어난다. 안장마디 쌍갈림 경우에는 안정한 주기궤도와 불안정한 주기궤도가 쌍을 이루면서 나타나게 된다. 그림 2를 보게 되면 연속선(solid line)으로 나타낸 안정한 궤도와 대시선(dashed line)으로 나타낸 불안정한 궤도가 쌍을 이루고 있는데, 이러한 쌍갈림을 안장마디 쌍갈림이라 한다. 그리고 그림 3, 4, 5에서도 안정한 궤도는 연속선, 불안정한 궤도는 대시선으로 나타낸다.

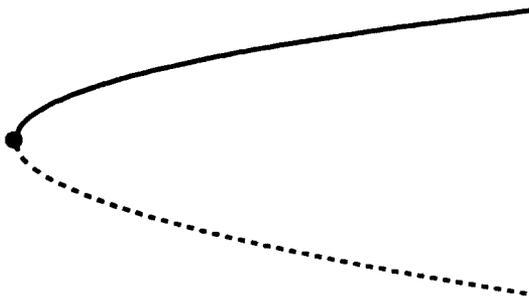


Fig. 2. A saddle-node bifurcation. The solid and dashed lines denote stable and unstable orbits, respectively.

넘김고비 쌍갈림은 안정한 궤도가 주위의 같은 주기의 불안정한 궤도와 만나면서 안정한 궤도는 불안정해지고 불안정한 궤도는 안정해지는 쌍갈림이다. 그림 3은 안정한 궤도가 불안정한 궤도와 만나면서 안정성을 교환하고 있는 넘김고비 쌍갈림을 보여주고 있다.

또한, 초임계 갈퀴 쌍갈림인 경우에는 그림 4(a)에서와 같이 주기궤도가 불안정해지면서 같은 주기를 갖는 서로 다른 안정한 궤도 두개가 나타난다. 반면에, 그림 4(b)에서 처럼 주기궤도가 주위의 같은 주기를 갖는 불안정한 궤도 두개를 흡수하면서 불안정해지

는 것을 버금임계 갈퀴 쌍갈림이라 한다.

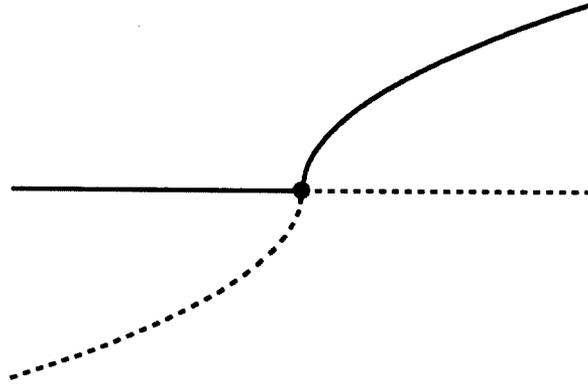


Fig. 3. A transcritical bifurcation. The solid and dashed lines represent the same as those in Fig. 2.

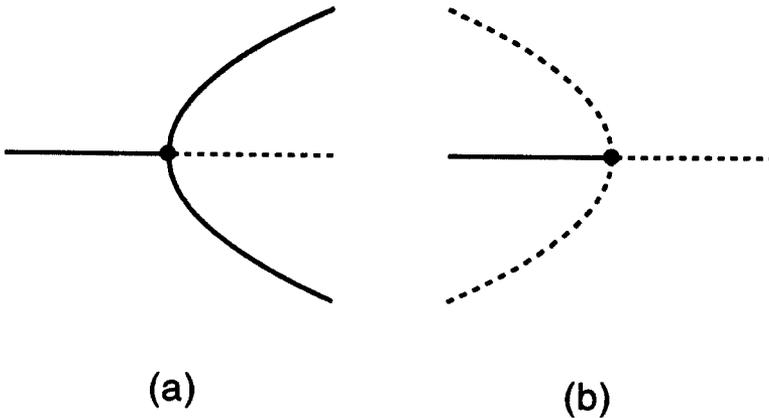


Fig. 4. (a) A supercritical pitchfork bifurcation. (b) A subcritical pitchfork bifurcation. The solid and dashed lines represent the same as those in Fig. 2.

다음으로, R 이 1보다 커지면 초임계 또는 버금임계 주기배가 쌍갈림이 있다. 초임계

주기배가 쌍갈림은 주기궤도가 불안정해지면서 주기배가 된 안정한 궤도가 나타나는 것이다. 그림 5(a)는 주기궤도가 불안정해지면서 주기배가 된 안정한 궤도[속이찬 원들(solid circles)]가 나타나는 초임계 주기배가 쌍갈림을 보여주고 있다. 반면에, 주기궤도가 주위의 불안정한 주기배가 궤도를 흡수하면서 불안정해 지는 것을 버금임계 주기배가 쌍갈림이라 한다. 그림 5(b)는 주기궤도가 불안정한 주기배가 궤도[열린 원들(open circles)]를 흡수하면서 불안정해지는 버금임계 주기배가 쌍갈림을 보여주고 있다.

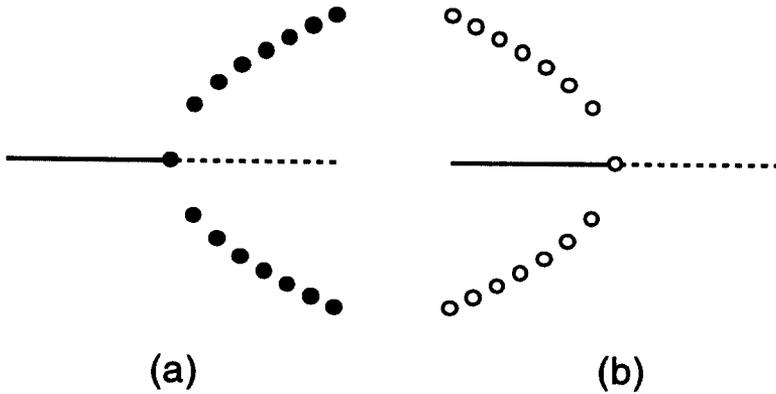


Fig. 5. (a) A supercritical period-doubling bifurcation. (b) A subcritical period-doubling bifurcation. The solid and dashed lines represent the same as those in Fig. 2. Moreover, solid and open circles denote stable and unstable orbits of period 2, respectively.

푸앵카레 본뜨기 P 에서 어떤 궤도 $\{z_m\}$ 의 리아프노프 지수는 근처 궤도들의 평균 지수적 발산율을 나타낸다 [18]. 두개의 리아프노프 지수 σ_1 과, σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$)가 존재한다. 흔들이에서 선형 푸앵카레 본뜨기 행렬(DP)의 야코비안 행렬식 값이 상수이므로($\det DP = e^{-2\pi\gamma}$) 두개의 리아프노프 지수는 다음과 같은 관계가 성립한다: $\sigma_1 + \sigma_2 = -2\pi\gamma$. 초기 궤도점 z_0 에 초기 섭동 δz_0 를 가하고, 궤도를 따라 δz 에 대해 DP 를 반복해

서 작용하면 δz_m 의 크기 $d_m(\equiv |\delta z_m|)$ 을 얻어낼 수 있다. 그러면 거의 모든 초기 무한소 섭동들에 대해, 최대 리아프노프 지수 σ_1 을 구할 수 있다:

$$\sigma_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \frac{d_m}{d_0}. \quad (14)$$

σ_1 이 양수이면 혼돈궤도(chaotic orbit), 음수이면 정칙궤도(regular orbit)라 부른다.

III. 다중 주기배가 혼돈전이

이 절에서는 맺음변수 강제 감쇠 흔들이에서 $\gamma = 0.1$ 일 때 ω_0 와 A 를 변화시키면서 평형점의 안정성과 관련된 쌍갈림에 대해 분석해 보고자 한다. 임의의 ω_0 에서 A 를 증가시켜 가면 주기배가를 통한 혼돈전이가 무한히 반복해서 일어난다. 이러한 현상은 오직 한번 주기배가를 통한 혼돈전이를 하는 1차원 본뜨기나 다른 감쇠 강제 흔들이 [12] 경우와 좋은 대조를 이룬다.

그림 6은 ω_0 - A 평면에서 평형점에 대한 안정성 도표를 나타낸다. 이 안정성 도표는 무한히 많은 불연속적인 불안정한 영역들과 그 밖의 안정한 영역으로 구성되어져 있다. 여기서 불안정한 영역은 “혀”의 모양과 닮아서 “혀”라 부른다. 또한, 이러한 혀들은 안정한 영역을 사이에 두고 각각 떨어져서 존재한다. 한편, $\gamma = 0$ 인 비감쇠 경우에는 $(\omega_0, A) = (\frac{n}{2}, 0)$ 에서 맺음변수 공명이 일어나므로, 각 혀는 정수 n 으로 표기할 수 있다 [1-3,10,11]. 그러나 $\gamma \neq 0$ 인 감쇠 경우에는 n 번째 맺음변수 공명이 일어나기 위해선 0보다 큰 문턱값 $A_t(n)$ 이 필요하다 [1-3]. 여기서 n 을 점차 증가시켜 가면 그림 6에서처럼 $A_t(n)$ 의 값이 급격히 증가함을 볼 수 있다. 이 후부터 n 번째 혀를 T_n 으로 나타내겠다.

A 가 증가함에 따라 각 T_n 은 좌측으로 기울면서 T_{n-1} 위에 놓이게 된다. 따라서 임의의 ω_0 에서 안정한 A 영역과 불안정한 A 영역이 번갈아 가면서 존재하게 된다. 즉, A 를 증가시켜 가면, 평형점은 불안정해진 후 다시 안정성을 회복하는 과정을 계속해서 반복하

게 되는데, 이러한 “부활” 현상에 대해 좀 더 자세하게 기술하고자 한다.

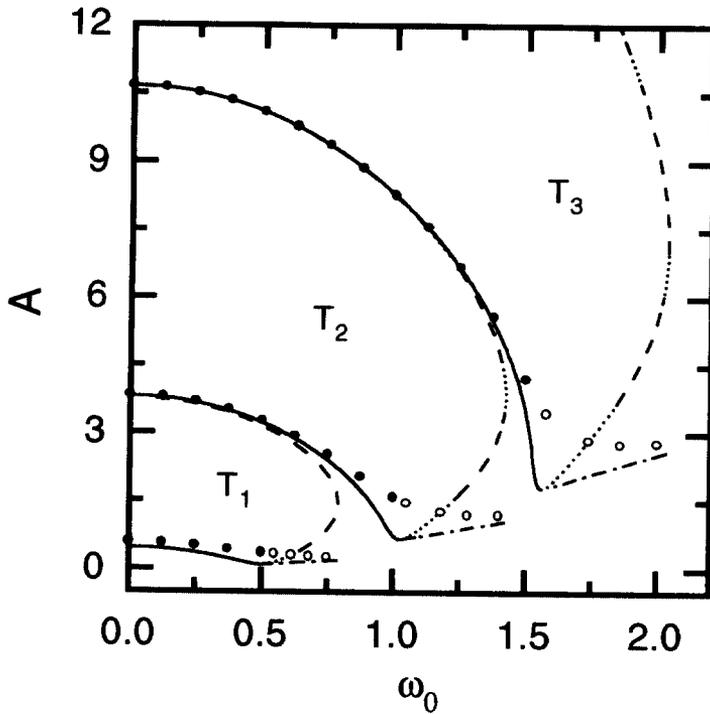


Fig. 6. Stability diagram of the stationary point. T_n represents the instability region of order n . The solid and dashed or dotted curves denote super and subcritical bifurcation curves, respectively. The solid and open circles represent the accumulation points of period-doubling bifurcations. For other details, see the text.

각 n 의 경계에서 일어나는 쌍갈림은 n 이 홀수냐 짝수냐에 따라 다른 현상을 보인다. 경계선에서 평형점의 유수는 홀수인 경우 $R = 1$ 인데 반해 짝수인 경우에는 $R = 0$ 이다. 그러므로 II절에서 설명했듯이, 홀수(짝수) n 의 경계선에서 주기배가(갈퀴) 쌍갈림이 일어난다. 예를 들면, 그림 6에서 T_1 과 T_3 의 경계선은 주기배가 쌍갈림 곡선인데 반해,

T_2 의 경계선은 갈퀴 쌍갈림 곡선이다. 또한, 대시-점 곡선(dash-dotted curve)들은 안장마디 쌍갈림을 나타내고 있는데 n 이 홀수(짝수)인 경우에 한쌍의 하나는 안정하고 다른 하나는 불안정한 주기 $2(1)$ 인 궤도가 이 곡선 위에서 태어난다. 이러한 안장마디 쌍갈림 곡선들이 각 혀의 경계선과 만나는 점 $[\omega_b(n), A_b(n)]$ 을 경계로 주기배가(갈퀴) 쌍갈림은 초임계와 버금임계 주기배가(갈퀴) 쌍갈림으로 나뉘게 된다. 즉, 안장마디 쌍갈림 곡선들이 T_1, T_2, T_3 의 경계선과 만나는 점을 경계로 연속선으로 나타낸 초임계 주기배가 또는 갈퀴 쌍갈림 곡선과 대시선과 점선으로 나타낸 버금임계 주기배가 또는 갈퀴 쌍갈림 곡선으로 나뉘게 된다. 게다가, 버금임계 쌍갈림 곡선들은 경계점 $[\omega_b(n), A_b(n)]$ 으로부터 우측으로 진행하다가 휘는점 $[\omega_t(n), A_t(n)]$ 을 기점으로 좌측으로 진행하게 된다. 이와 같은 버금임계 쌍갈림 곡선의 $\omega_b(n) < \omega_0 < \omega_t(n)$ 구간에서 평형점은 안장마디 쌍갈림으로 태어난 불안정한 궤도를 흡수하면서 불안정해진다. 반면, 안장마디 쌍갈림으로 태어난 안정한 궤도는 무한연속 주기배가 쌍갈림을 통해 혼돈전이 하며, 이때의 임계점은 그림 6에서 열린 원들로 나타내었다.

평형점이 초임계 주기배가(갈퀴) 쌍갈림을 통해서 불안정해진 후에, 맺음변수 강제 감쇠 흔들이 계는 점근적으로 주기배가된(같은 주기의) 주기적인 끌개로 끌려간다. 그러나 버금임계 쌍갈림인 경우에는 경계선의 구간에 따라 접근 상태가 주기적 혹은 혼돈 상태가 된다. 그림 6에서 점선으로 나타낸 구간에서는 그림 7(a)과 같이 평형점이 안장마디 쌍갈림으로 태어난 불안정한 주기궤도를 흡수하면서 불안정해진 후에, 안정한 주기궤도로 끌려가며 이 경우에 안정한 주기궤도는 무한연속 주기배가를 통해 혼돈전이가 하게 된다. 한편, 대시선으로 나타낸 구간에서는 그림 7(b)과 같이 불안정한 궤도를 흡수하면서 간헐성 [19]을 통해서 바로 혼돈상태가 된다.

A 를 상당히 크게 증가시켜가면서 평형점의 안정성과 관련된 쌍갈림 현상을 여러 개의 ω_0 에 대해 면밀히 관찰해 보면, 그림 6에서 보여주는 것처럼 임의의 ω_0 에서 평형점은 버금임계 주기배가 및 갈퀴 쌍갈림을 통해서 번갈아 가면서 안정성을 회복하게 된다. 반

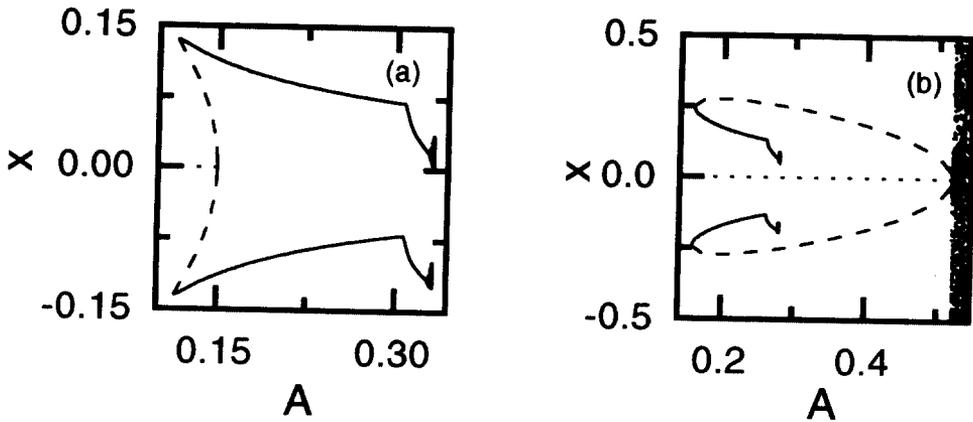


Fig. 7. Asymptotic states after the instability of the stationary point via subcritical bifurcations. (a) The stationary point jumps to the stable 2-periodic orbit for $\omega_0=0.55$, whereas (b) large-scale full chaos appears for $\omega_0=0.6832$. For other details see the text.

면, ω_0 에 따라서 평형점이 초임계 또는 버금임계 쌍갈림을 통해 처음으로 불안정해지지만 (예를 들어, $\omega_0 = 0.5(0.65)$ 에서는 초임계(버금임계) 주기배가 쌍갈림을 통해 처음으로 불안정해진다), 그 후부터는 초임계 주기배와 같귀 쌍갈림을 번갈아 하면서 불안정해진다. 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 불안정해지는 경우에는 무한연속 주기배가 쌍갈림을 하면서 임계점에 도달한 후에 한쌍의 작은 혼돈끌개(small chaotic attractor)가 나타난다. 그림 6에서 속이찬 원들은 각 혀에서의 임계점들을 나타내고 있는데 이러한 임계점들이 하나의 매끄러운 곡선을 형성함을 알 수 있다. 결론적으로, 1차원 본뜨기나 다른 감쇠 강제 흔들이가 오직 한번 주기배를 통해 혼돈전이라는 것과는 대조적으로 무한연속 주기배를 통한 혼돈전을 계속해서 반복하게 된다.

앞에서 기술한 다중 주기배가 혼돈전이의 예로 $\omega_0 = 0.5$ 인 경우에 대해 고찰해 보자. 이 경우 평형점은 그림 8에 나타나 있듯이 첫번째 불안정해지는 점 $A_d(1) = 0.100218 \dots$

에서 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 불안정해진다. 이 때 안정한 주기2인 대칭궤도가

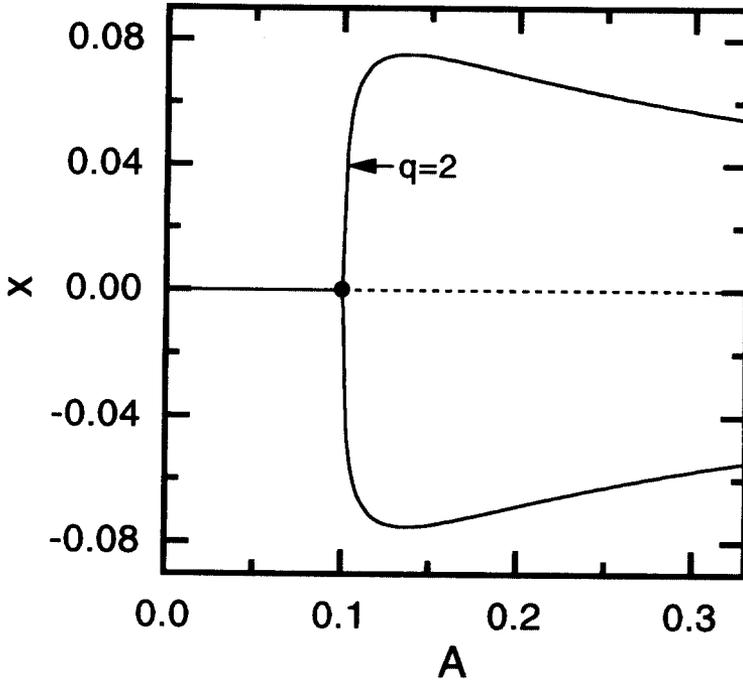


Fig. 8. Bifurcation diagram of the first destabilization of the stationary point with $x=0$. Here $q=2$ denotes the period of an orbit, born via supercritical period-doubling bifurcation. The solid and dashed lines designate stable and unstable orbits, respectively.

태어난다. 이렇게 태어난 주기2인 궤도는 평형점의 경우와는 달리 A 를 증가시켰을 때 대칭파괴(symmetry-breaking) 초임계 갈퀴 쌍갈림을 통해 불안정해진다. 그 결과로 주기2이며 서로가 공액인 한쌍의 비대칭 궤도가 태어난다. 여기서 A 를 계속해서 증가시켜 가면 비대칭 궤도들은 각각 무한연속 주기배가를 하고 임계점 $A_1^*(= 0.35770984 \dots)$ 을 통과하면 혼돈전이가 일어난다. 이러한 $\omega_0 = 0.5$ 에서의 쌍갈림 도표는 그림 9에 잘 나타나 있다. (그림 9에서는 비대칭 궤도중 하나만을 나타내었다.) 그리고 임계점 부근에서의

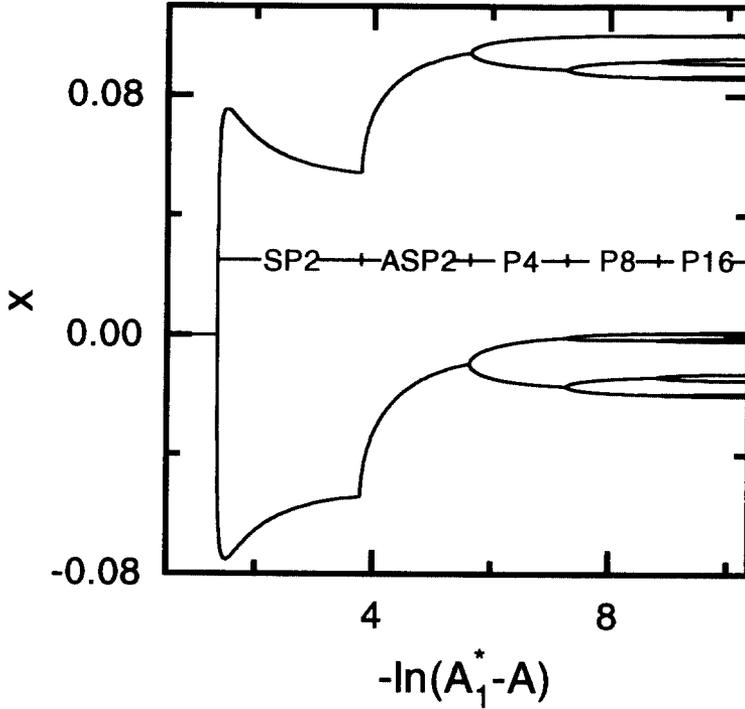


Fig. 9. First bifurcation diagram for $\omega_0=0.5$. The SP2 and ASP2 denote the stable A-ranges of the symmetric and asymmetric orbits of period 2, respectively. The PN also designates the stable A-range of the asymmetric periodic orbit with period N ($N=4,8,16$).

임계거동은 1차원 본뜨기 경우와 같으며, 이 부분에 대한 자세한 내용은 IV절에서 다룰 것이다.

여기서 혼돈전이 후의 현상을 살펴보면, 리아프노프 지수 σ_1 이 양수이며 서로 공액인 한쌍의 작은 혼돈끝개가 존재한다. 또한, 좀 더 A 를 증가시켜 가면 각각의 작은 혼돈 끝개들이 합체되는 현상을 관찰할 수 있다. 예를들어, 그림 10(a)을 보면, $\sigma_1 = 0.091$ 이며 4개의 조각으로 형성된 혼돈끝개가 멱음변수의 값이 $A = 0.3579$ 로 증가되었을 때, 그림 10(b)에 나타나 있듯이, $\sigma_1 = 0.158$ 이며 양 쪽의 조각들이 각각 합체되어 2개의 조각으

로 이루어진 혼돈끌개가 된다. 그러나 이러한 혼돈끌개들도 A 가 유한한 임계점 $A_c(1)(\approx$

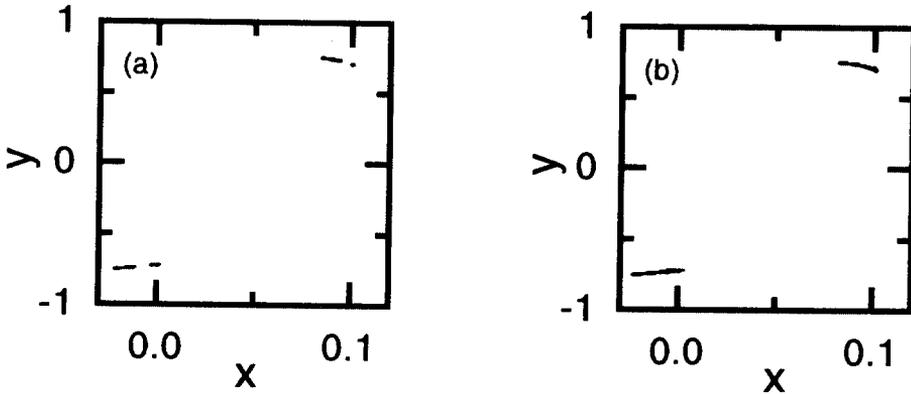


Fig. 10. Chaotic attractors after the first period-doubling transition to chaos for (a) $A=0.3579$ and (b) $A=0.3582$.

0.3586)보다 커지면 불안정해지고, 맷음변수 강제 감쇠 혼들이 계는 안장마디 쌍갈림으로 태어난 주기1인 회전궤도(rotational orbit)로 점근적으로 끌려가게 된다. 이 계는 $A > A_c(1)$ 인 단계에서도 상당히 다양한 동역학적 거동을 보여주고 있다. 다시말해, 평형점이 안정성을 회복하기 전까지 이 영역에서 안장마디 쌍갈림으로 태어난 주기적인 끌개가 혼돈전이 한다면, 서로 다른 끌개들이 공존하는 현상 등을 보인다. (이러한 동역학적 거동에 대한 자세한 내용은 이전의 일들 [4-9]를 참조하시오.) 그러나 A 를 더 증가시켜 가면 이전의 연구에서 볼 수 없었던 새롭고 흥미로운 현상을 발견할 수 있다.

A 가 증가하여 T_1 에서 대시선으로 표시된 버금임계 경계선을 통과하게 되면 평형점은 첫번째 안정성을 회복하는 점 $A_r(1)(= 3.150509 \dots)$ 에서 버금임계 주기배가 쌍갈림을 통해 안정해진다. 이 과정은 그림 7(b)의 역으로 진행하는 경우이다. 즉, 그림 11에 나타나 있듯이, A 가 $A_r(1)$ 을 통과하면서 평형점은 불안정한 주기 2인 궤도를 방출시키고 안정성을 회복하게 된다. 이때, 평형점의 유수 R 은 1이 되고 A 가 증가할 수록 점차 감소하여 T_2 의 초임계 갈퀴 쌍갈림 곡선상의 점 $A_d(2) = 3.224230 \dots$ 에서 $R = 0$ 가 되어 다시

불안정해진다.

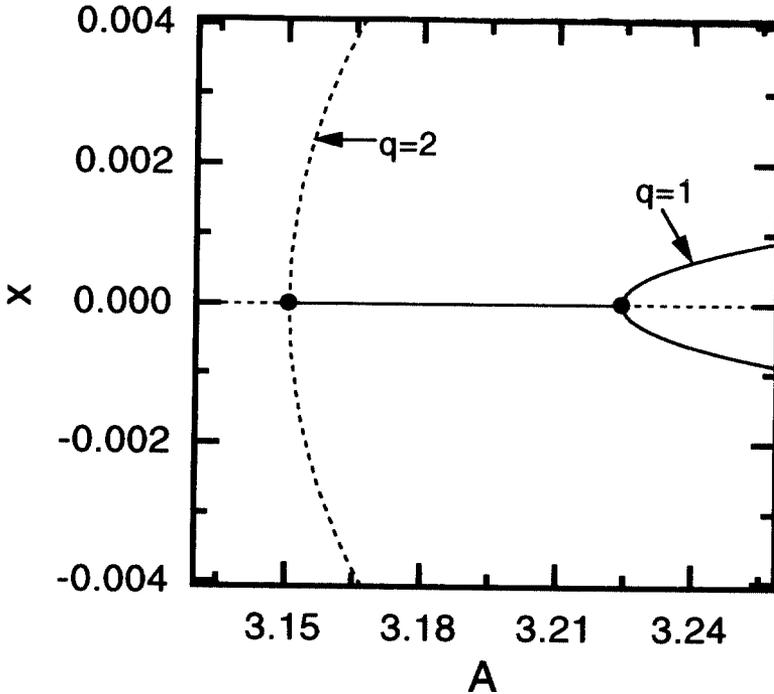


Fig. 11. Bifurcation diagram of the first resurrection of the stationary point with $x=0$. Here $q=1(2)$ denotes the period of an orbit, born via supercritical pitchfork bifurcation (subcritical period-doubling bifurcation). The solid and dashed lines designate stable and unstable orbits, respectively.

평형점이 $A_d(2)$ 에서 초임계 갈퀴 쌍갈림을 통해 불안정해지고 주기1이며 서로가 공액인 한쌍의 비대칭 궤도가 태어난다. 여기서 태어난 비대칭 궤도들 또한 A 가 증가함에 따라 각각 무한연속 초임계 주기배가 쌍갈림을 하고 임계점 $A_2^*(= 3.263\ 703\ 15 \dots)$ 를 통과하면 혼돈전이가 일어난다. 이와 같은 $\omega_0 = 0.5$ 에서의 두번째 무한연속 주기배가 쌍갈림 도표는 그림 12에 잘 나타나 있다. 그리고 $A = A_2^*$ 부근에서의 임계거동은 첫번째 임

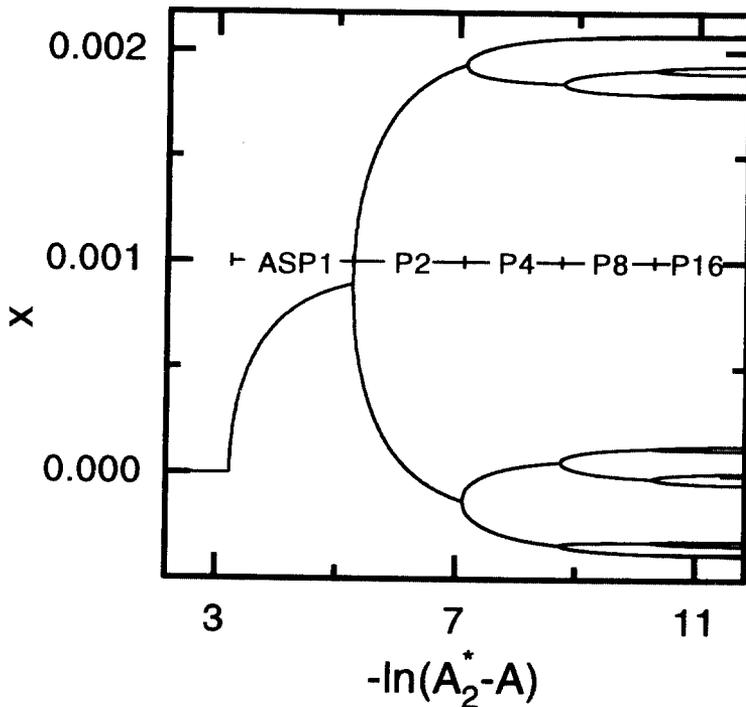


Fig. 12. Second bifurcation diagram for $\omega_0=0.5$. The ASP1 and PN denote the stable A-ranges of the asymmetric orbit of period 1 and N ($N=2,4,8,16$), respectively.

계점 A_1^* 부근의 임계거동과 같으며, 혼돈전이 후에도 역시 작은 혼돈끝개가 유한한 임계점 $A_c(2)$ (≈ 3.263862)까지 존재한다. 그 후에 땀음변수 강제 감쇠 혼들이 계는 안장마디 쌍갈림으로 태어난 주기2인 궤도로 끌려간다. 첫번째 혀의 경우와 동일하게, A 가 $A_c(2)$ 보다 커지면 평형점이 다시 안정성을 회복할 때까지 아주 다양한 동역학적 거동을 보여준다. 즉, $A_c(2)$ 와 두번째 안정성을 회복하는 점 $A_r(2)$ ($= 10.093985 \dots$) 사이의 영역에서는 주기적인 끝개에서 혼돈끝개로의 전이라든가 서로 다른 끝개들이 공존하는 것과 같은 현상 등이 나타난다.

A 가 증가하여 T_2 에서 대시선으로 표시한 버금임계 경계선을 통과하게 되면, 평형점은

$A_r(2)$ 에서 버금임계 갈퀴 쌍갈림을 통해 주기1이며 서로가 공액인 한쌍의 불안정한 비대칭 궤도들을 방출하면서 또다시 안정해진다. 이때 평형점의 유수 R 은 0이 된다. 이렇게 안정해진 평형점 또한 A 를 계속해서 증가시켜 가면 R 이 점차적으로 증가하여, T_3 의 초임계 주기배가 쌍갈림 곡선상의 점 $A_d(3)(= 10.097583 \dots)$ 에서 $R = 1$ 이 되어 다시 불안정해진다. 그리고 $A_d(3)$ 에서 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 주기2인 대칭 궤도가 태어난다. 그림 13에 이와 같은 일련의 과정이 잘 나타나 있다. 이렇게 태어난 주기2인 궤

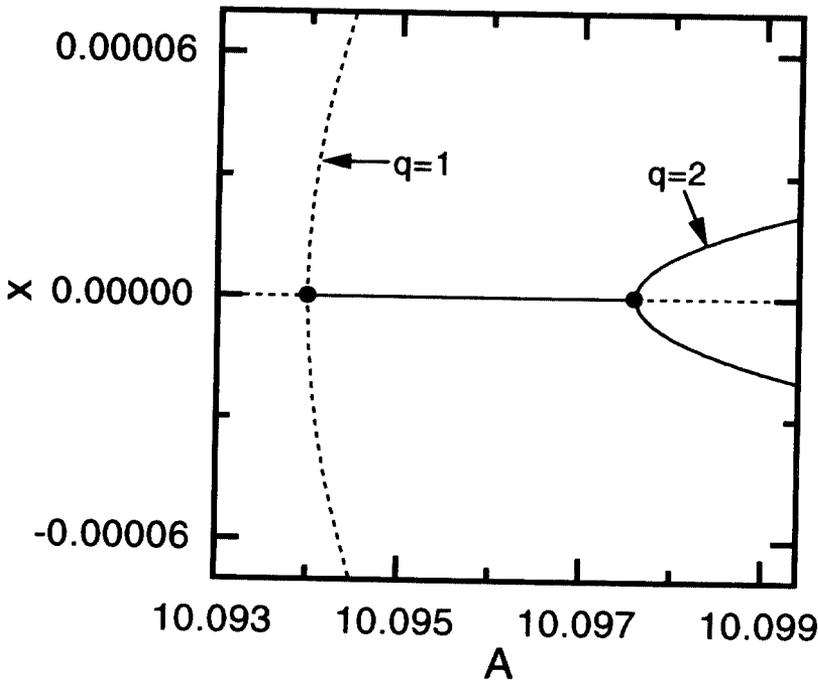


Fig. 13. Bifurcation diagram of the second resurrection of the stationary point with $x=0$. Here $q=1(2)$ denotes the period of an orbit, born via subcritical pitchfork bifurcation (supercritical period-doubling bifurcation). The solid and dashed lines stable and unstable orbits, respectively.

도는, T_1 에서의 경우와 마찬가지로 A 를 증가시켰을 때 초임계 갈퀴 쌍갈림을 통해 불

안정해지면서, 같은 주기를 갖으며 서로가 공액인 한쌍의 비대칭 궤도를 생성한다. 여기서 A 를 계속해서 증가시켜 가면 비대칭 궤도들은 각각 무한연속 주기배가를 하고 임계점 $A_3^*(= 10.099\ 660\ 93\ \dots)$ 를 통과하면 혼돈전이 일어난다. 이와 같은 $\omega_0 = 0.5$ 에서의 세번째 무한연속 주기배가 쌍갈림은 그림 14에 잘 나타나 있다. 또한, A_3^* 부근에서의

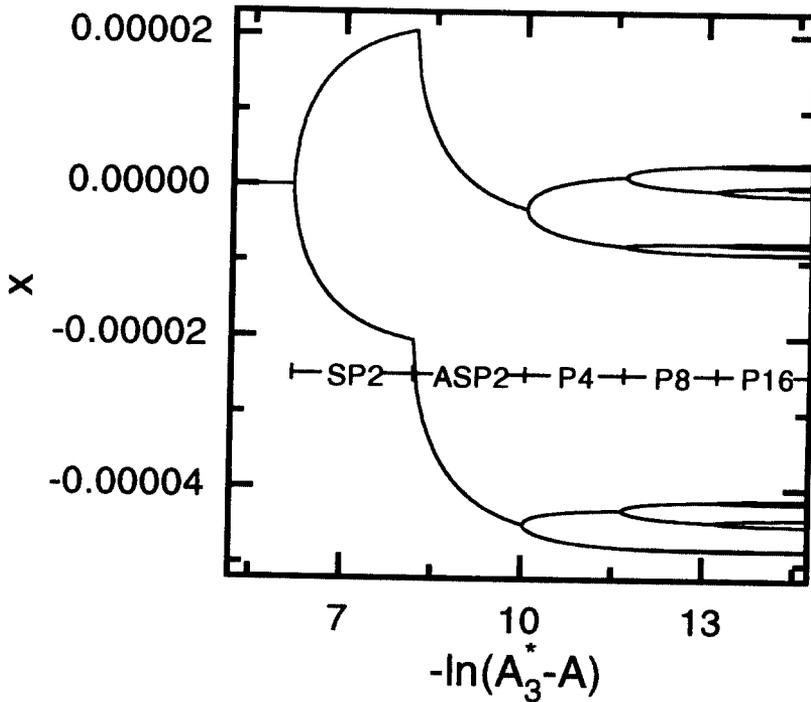


Fig. 14. Third bifurcation diagram for $\omega_0=0.5$. The SP2 and ASP2 denote the stable A-ranges of the symmetric and asymmetric orbits of period 2, respectively. The PN also designates the stable A-range of the asymmetric periodic orbit with period N ($N=4,8,16$)

임계거동은 A_1^* 부근에서 나타나는 현상과 같은 거동을 보여주며 혼돈전이 후에도 역시 한쌍의 작은 혼돈끝개가 유한한 A영역까지 존재한다. 결론적으로, T_1 에서 평형점이 불

안정해지면서 나타나는 여러 가지 거동들이 T_3 에서 반복됨을 알 수 있다.

본 연구에서는 또 다른 여러 가지 ω_0 에서 A 를 증가시켰을 때 혼돈전이 현상이 반복해서 일어남을 발견했다. 그러한 임계점들을 그림 6에서 속이찬 원들로 나타냈다. 여기서 임계점들이 하나의 매끄러운 곡선을 형성하는 것을 볼 수 있다. 각 혀에서의 이런 임계곡선은 $0 < \omega_0 < \omega_b(n)$ 구간에서 혀의 안쪽에 위치한다. 또한, 안장마디 쌍갈림 곡선 위에서 태어난 안정한 궤도들도 무한연속 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 혼돈전이한다. 앞에서 언급했듯이, 이러한 임계점들은 열린 원들로 나타냈다. 이와 같은 열린 원들도 매끄러운 곡선을 형성한다. 이렇게 형성된 두개의 임계곡선들은 $\omega_0 = \omega_b(n)$ 에서 연결되어진다. 결과적으로, 각 혀에서의 임계곡선은 혀의 안에서 밖으로 확장하게 된다.

IV. 주기배가 쌍갈림의 임계거동

이 절에서는 여러 가지 ω_0 에 대해 주기배가 쌍갈림의 임계거동을 분석해 보고자 한다. 맷음변수의 축적거동을 면밀히 관찰할 뿐만 아니라 주기배가 쌍갈림을 통해 나타나는 주기적인 궤도들의 궤도축적 거동과 일률 스펙트럼(power spectrum)에 대해 탐구 하고자 한다. 또한, 우리가 연구한 모든 경우에 축적 거동들은 1차원 본뜨기의 경우와 같음을 발견했다.

예로, $\omega_0 = 0.5$ 인 경우를 생각해 보자. 그림 6에 처음 세개의 주기배가 혼돈전이점 $A_i^*(i = 1, 2, 3)$ 이 나타나 있다. 여기서는 A_1^* 부근의 임계거동에 대해서만 기술하고자 한다. 왜냐하면, 세개의 혼돈전이점 부근에서는 같은 임계거동을 보이기 때문이다. 앞서 설명했다듯이, 평형점이 $A = A_d(1)$ 에서 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 불안정해지면서 주기 2인 대칭궤도가 나타난다(그림 8을 보시오). 이 대칭궤도 또한 $A = 0.335257 \dots$ 에서 초임계 갈퀴 쌍갈림을 통해 불안정해진다. 그 결과로 주기 2이며 서로가 공액인 한쌍의 비대칭 궤도들이 나타난다. 여기서 계속해서 A 를 증가시켜 가면 각각의 비대칭 궤도들은

임계점 A_1^* 까지 무한연속 초임계 주기배가 쌍갈림을 하게 된다. 이 과정에서 나타난 주기 $2^k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 인 비대칭 궤도들이 초임계 주기배가 쌍갈림을 하게 되는 값 A_k 가 표 1에 주어졌다. 다시 말해, 주기 2^k 인 비대칭 궤도는 A_k 에서 유수 R_k 가 1이 되어 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 불안정해진다. 그리고 A_k 에 대한 다음과 같은 비(ratio)을 생각하자:

$$\delta_k = \frac{A_k - A_{k-1}}{A_{k+1} - A_k} \rightarrow \delta. \quad (15)$$

δ_k 는 A_1^* 으로 접근할 수록 $\delta (\simeq 4.67)$ 로 수렴함을 알 수 있다(표 1을 보시오). 이 값은

표 1. Asymptotically geometric convergence of the parameter values for successive supercritical PDB's from an asymmetric 2-periodic orbit.

k	A_k	δ_k
1	0.354 163 288 011	
2	0.357 022 317 174	5.286
3	0.357 563 141 135	4.692
4	0.357 678 400 212	4.665
5	0.357 703 107 281	4.666
6	0.357 708 401 983	4.668
7	0.357 709 536 272	4.670
8	0.357 709 779 136	

1차원 본뜨기 $x_{m+1} = f(x_m)$ 에서의 값(= 4.669...)과 잘 일치한다는 것을 알 수 있다 [21]. 또한, 수열 $\{A_k\}$ 를 초수렴화(superconverging)해서 [22] $A_1^*(= 0.357 709 845 3)$ 값을 구할 수 있다. 따라서, 비대칭 궤도들의 주기가 높아져갈 수록 1차원 본뜨기에서 보여준 거동과 같은 현상을 보이게 된다.

1차원 본뜨기 f 에서 주기 2^k 인 궤도가 불안정해질 때, 최대점 x^* 에 가장 근접한 궤도점 $x^{(k)}$ 를 관찰해 보면, 임계점에 접근할 수록 이러한 궤도점 $x^{(k)}$ 는 일정한 비 $\alpha = -2.502 \dots$ 로 최대점 x^* 에 수렴해 간다 [21]. 여기서 $x^{(k)}$ 와 이 궤도점에 가장 근접한 궤도점 $f^{2^{k-1}}(x^{(k)})$ 사이의 떨어진 간격이 다른 궤도점들의 이와 같은 간격들 보다 크기 때문에 최대점 x^* 부근의 영역은 궤도점 밀도가 가장 희박한 지역이다. 푸앵카레 본뜨기 P 의 경우에서도 동일하게 주기 2^k 인 비대칭 궤도에 대해 $A = A_k$ 에서 가장 근접한 궤도점 사이의 간격이 최대인 궤도점 $z^{(k)} [= (x^{(k)}, y^{(k)})]$ 를 선택해서 궤도의 축적거동을 탐구하였다. 즉, $z^{(k)} [= (x^{(k)}, y^{(k)})]$ 와 $P^{2^{k-1}}(z^{(k)})$ 사이의 간격은 다른 궤도점들의 이와 같은 간격들보다 크다. 여기서 두개의 수열 $\{x^{(k)}\}$ 과 $\{y^{(k)}\}$ 의 값들은 표 2에 주어졌다. 이 표 2. Asymptotically geometric convergence of the orbital sequences $\{x^{(k)}\}$ and $\{y^{(k)}\}$.

k	$x^{(k)}$	$\alpha_{x,k}$	$y^{(k)}$	$\alpha_{y,k}$
1	0.094 410 516		0.719 956 679	
2	0.088 901 931	-1.933	0.738 357 722	-3.935
3	0.091 750 680	-3.085	0.733 681 177	-2.156
4	0.090 827 396	-2.261	0.735 850 056	-2.717
5	0.091 235 660	-2.635	0.735 051 829	-2.398
6	0.091 080 705	-2.436	0.735 384 746	-2.558
7	0.091 144 315	-2.538	0.735 254 611	-2.474
8	0.091 119 256		0.735 307 206	

러한 $x^{(k)}$ 과 $y^{(k)}$ 에 대해 1차원 본뜨기에서와 같이 다음과 같은 비를 생각하자:

$$\alpha_{x,k} = \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}} \rightarrow \alpha, \quad \alpha_{y,k} = \frac{y^{(k)} - y^{(k-1)}}{y^{(k+1)} - y^{(k)}} \rightarrow \alpha. \quad (16)$$

그러면 표 2에 나타나 있듯이 $\alpha_{x,k}$ 와 $\alpha_{y,k}$ 값이 점근적으로 1차원 본뜨기에서의 값 α 에 접근하는 것을 알 수 있다. 또한, $x^{(k)}$ 과 $y^{(k)}$ 는 각각 극한점 x^* 과 y^* 으로 수렴하게 된다. 여기서 $x^*(= 0.091126)$ 과 $y^*(= 0.735292)$ 의 값은 α 와 수열 $\{x^{(k)}\}$ 과 $\{y^{(k)}\}$ 을 초수렴화해서 구할 수 있다.

마지막으로, 본 연구에서는 주기 2^k 인 궤도들($k = 1, \dots, 8$)에 대해 각각 주기배가 쌍갈림을 하는 점 A_k 에서 일률 스펙트럼을 분석하였다. 주기가 $q = 2^k$ 인 궤도 $\{z_m^{(k)} = (x_m^{(k)}, y_m^{(k)}), m = 0, 1, \dots, q-1\}$ 에서 j 번째 푸리에(Fourier) 성분은 다음과 같이 주어진다:

$$z^{(k)}(\omega_j) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} z_m^{(k)} e^{-i\omega_j m}. \quad (17)$$

여기서 $\omega_j = 2\pi j/q$ 이고 $j = 0, 1, \dots, q-1$ 이다. 준위 k 에서 다음과 같이 정의된 일률 스펙트럼 $P^{(k)}(\omega_j)$ 는 불연속적으로 $\omega = \omega_j$ 에서 봉우리(peak)를 형성한다:

$$P^{(k)}(\omega_j) = |z^{(k)}(\omega_j)|^2. \quad (18)$$

다음 준위 $(k+1)$ 에서의 일률 스펙트럼은 $\omega_j = 2\pi(2j+1)/2^{(k+1)}$ ($j = 0, \dots, 2^k-1$)에서 $(k+1)$ 번째 세대(generation)의 새로운 봉우리가 나타난다. 준위 k 의 일률 스펙트럼에서 연속적인 주기배가 쌍갈림들의 영향을 분류해 보면 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$P^{(k)} = P_{00}\delta(\omega) + \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{2^{(l-1)}-1} P_{lj}^{(k)}\delta(\omega - \omega_{lj}). \quad (19)$$

여기서 $P_{lj}^{(k)}$ 는 $\omega = \omega_{lj}$ ($\equiv 2\pi(2j+1)/2^l$)에서 나타나는 l 번째 세대 j 번째 봉우리의 높이이다. 예를 들어, 그림 15는 일률 스펙트럼 $P^{(8)}(\omega)$ 의 경우를 보여주고 있다. 또한, l 번째 세대 봉우리들의 평균 높이는 다음과 같이 주어진다:

$$\phi^{(k)}(l) = \frac{1}{2^{(l-1)}} \sum_{j=0}^{2^{(l-1)}-1} P_{lj}^{(k)}. \quad (20)$$

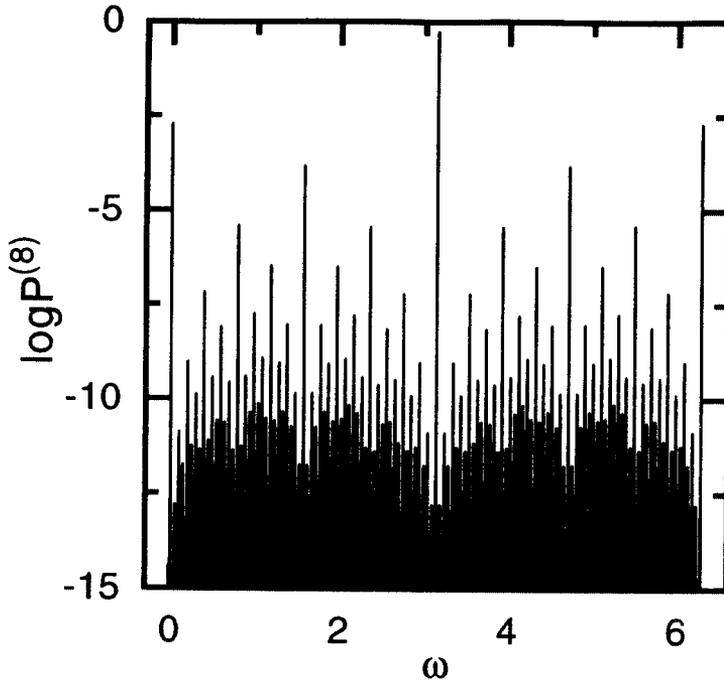


Fig. 15. Power spectrum $P^{(8)}(\omega)$ of level 8 for $A=A_8 (=0.357\ 709\ 779\ 136)$.

여기서 다음과 같은 연속적인 평균 높이들의 비가 어떤 값으로 수렴한다는 사실은 흥미로운 일이다:

$$2\beta^{(k)}(l) = \phi^{(k)}(l)/\phi^{(k)}(l+1). \quad (21)$$

이와 같은 비는 표 3에 주어졌다. 이러한 값들이 극한값 $2\beta \simeq 21$ 로 접근하고 있으며, 1차원 본뜨기에서의 값(= 20.96 ...)과 잘 일치한다 [23]. 결론적으로, 본 연구에서 살펴본 임계점 부근에서의 여러 가지 임계거동은 1차원 본뜨기에서의 같은 거동을 보여주고 있음을 확인할 수 있었다.

표 3. Sequence $2\beta^{(k)}(l) [\equiv \phi^{(k)}(l)/\phi^{(k)}(l+1)]$ of the ratios of the successive average heights.

k	l				
	3	4	5	6	7
6	19.8	22.5	21.1		
7	19.8	22.1	21.2	21.5	
8	19.8	22.0	20.7	21.6	21.4

V. 요약

맷음변수 강제 감쇠 혼들이에서 두개의 맷음변수 ω_0 와 A 를 변화시키면서 평형점의 안정성과 관련된 쌍갈림 현상에 대해 탐구하였다. 임의의 ω_0 에서 A 를 증가시켜 가면 평형점은 안정성을 잃어버리고 회복하는 과정을 계속해서 반복한다. A 를 증가시킬 때 주기배가를 통한 혼돈전이가 무한히 반복해서 일어나는 것은 이전의 연구에서 볼 수 없었던 새로운 사실이다. 이것은 오직 한번 혼돈전이하는 1차원 본뜨기나 다른 감쇠 강제 혼들이 [12] 경우와 좋은 대조가 된다. 또한, 혼돈전이 점에서의 임계 축적 거동이 1차원 본뜨기의 경우와 일치함을 발견했다.

참 고 문 헌

- [1] L.D Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, New York,1976), p. 80.
- [2] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978), p. 113.
- [3] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (MIT Press, Cambridge, 1973), p. 203.
- [4] J.B. Mclaughlin, *J. Stat. Phys.* **24**, 375 (1981).
- [5] R.W. Leven and B.P. Koch, *Phys. Lett. A* **86**, 71 (1981).
- [6] A. Arneodo, P. Couillet, C. Tresser, A. Libchaber, J. Maurer, and D. d’Humières, *Physica D* **6**, 385 (1983)
- [7] B.P. Koch and R.W. Leven, *Physica D* **16**, 1 (1985).
- [8] B.P. Koch, R.W. Leven, B. Pompe, and C. Wilke, *Phys. Lett. A* **96**, 219 (1983).
- [9] R.W. Leven, B. Pompe, C. Wilke, and B.P. Koch, *Physica D* **16**, 371 (1985).
- [10] P.M. Morse and H. Feshbach, *Method of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1953), Sec. 5.2.
- [11] J. Mathews and R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics* (Benjamin, New York, 1965), Sec. 7.5.
- [12] T. Kai, *Phys. Lett. A* **86**, 263 (1981); J. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714 (1982).
- [13] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory* (Dover Publications Inc., New York, 1977), Sec. 3.5.
- [14] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory* (Dover Publications Inc., New York, 1977), p. 60.

- [15] M. Hénon, Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976).
- [16] S.-Y. Kim and B. Hu, Phys. Rev. A **44**, 934 (1991); S.-Y. Kim and D.-S. Lee, Phys. Rev. A **45**, 5480 (1992).
- [17] J. Gukenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983), Sec. 3.5.
- [18] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer-Verlag, New York, 1983), Sec. 5.3.
- [19] Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980); A. Lahiri and T. Nag, Phys. Rev. Lett. **62**, 1933 (1989).
- [20] 각 비대칭 경우에 두개의 공액 비대칭 궤도 중에서 오직 하나의 궤도만이 쌍갈림 도표 혹은 위상평면 속에 나타난다.
- [21] M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979).
- [22] R.S. Mackay, Ph.D. thesis, Princeton University, 1982. See Eqs. 3.1.2.12 and 3.1.2.13.
- [23] M. Nauenberg and J. Rudnik, Phys. Rev. B **24**, 493 (1981).

Transition to chaos in a parametrically forced damped pendulum

Kijin Lee

Department of Physics

Graduate School, Kangwon National University

Abstract

We study bifurcations associated with stability of the lowest stationary point of aparametrically forced damped pendulum by varying ω_0 (the natural frequency of the pendulum) and A (the amplitude of the external driving force). As A is increased, the stationary point will restabilize after its instability, destabilize again, and so *ad infinitum* for any given ω_0 . Its destabilizations (restabilizations) occur via alternating supercritical (subcritical) period-doubling bifurcations (PDB's) and pitchfork bifurcations, except the first destabilization at which a supercritical or subcritical bifurcation takes place depending on the value of ω_0 . For each case of the supercritical destabilizations, an infinite sequence of PDB's follows and leads to chaos. Consequently, an infinite series of period-doubling transition to chaos appears with increasing A . The critical behaviors at the transition points are also discussed.