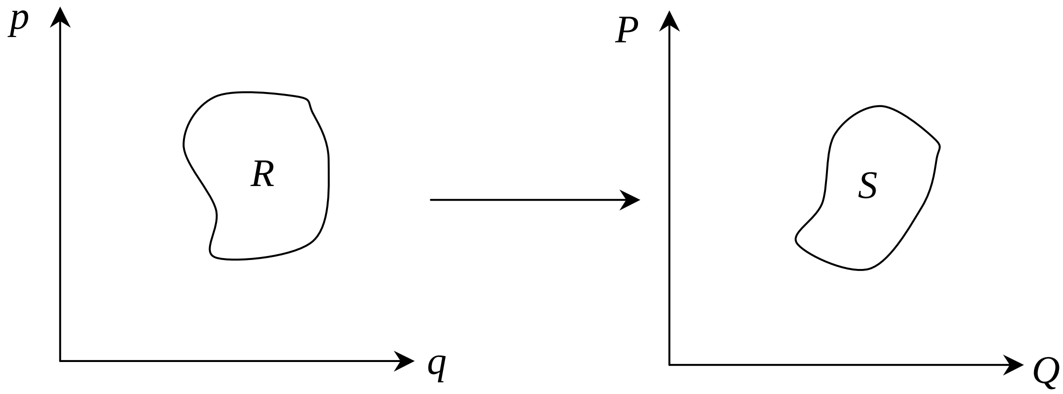
# Chapter 6

# Transformation Theory

## 6.1 시간에 무관한 변환

변환 이론

정준변환: Hamiltonian이 정준방정식을 보존하는 새 변수로의 변환 $\leftrightarrow$ 면적보존




$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p) \tag{6.1}$$

$$\int\int_S dP\,dQ = \int\int_R dp\,dq \tag{6.2}$$

일반적인 변수변환에서는

$$\int\int_S dQ\,dP = \int\int dq\,dp\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} \tag{6.3}$$

$$\text{면적보존:}\ \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1 = \frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} \tag{6.4}$$

**보기** $Q = p,\ P = -q$

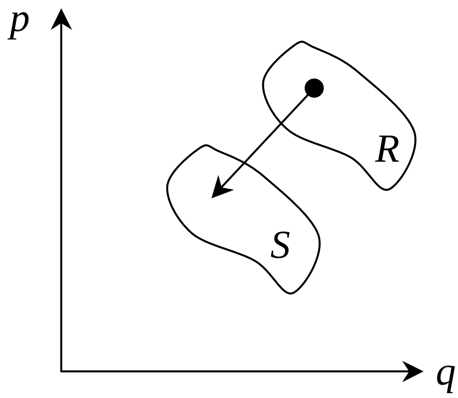
$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 && (6.5) \\ &= \text{const.} \rightarrow \text{scaling에 의해서 만들 수 있음} && (6.6) \end{aligned}$$

**보기** $q = P\cos Q,\ p = P\sin Q$

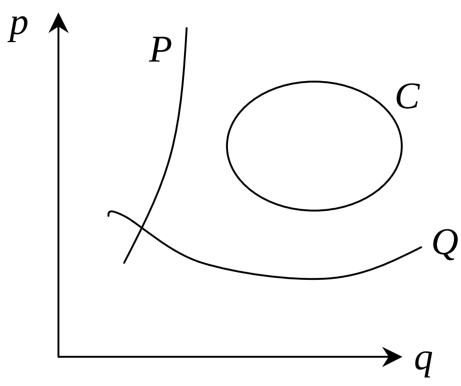
$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -P\sin Q & \cos Q \\ P\cos Q & \sin Q \end{vmatrix} && (6.7) \\ &= -P^2 \rightarrow \text{cannonical (X)} && (6.8) \end{aligned}$$

정준변환도 일반적인 변환과 마찬가지로 두가지 해석을 내릴 수 있다.

(1) 좌표계는 불변이고 역학상태가 $(q, p) \rightarrow (Q, P)$로 움직인다.



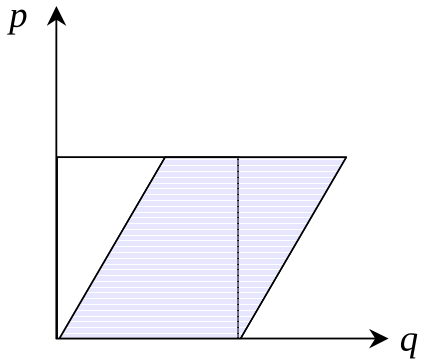

(2) 위상점은 불변이고 좌표계가 바뀌었다.



**보기**

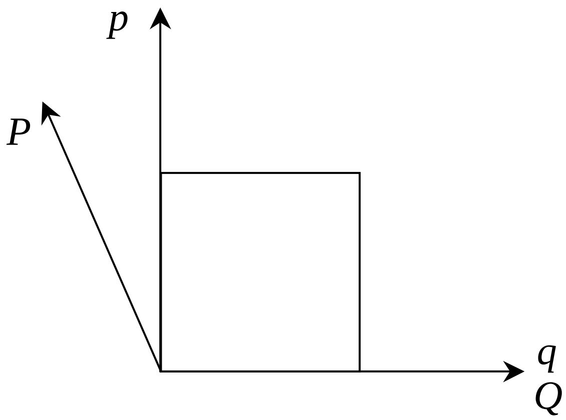
$$Q = q + \alpha P, P = p : \text{정준변환} \tag{6.9}$$

(1)




Shear transformation

(2)




빗좌표계
(skew coord. system)

## 6.2 모함수 or 생성함수(Generating Function)

$$\int\int dp\,dq \;=\; \int\int dP\,dQ \tag{6.10}$$

$$\downarrow \text{ Stoke's theorem}$$

$$\oint_C pdq \;=\; \oint_C PdQ \tag{6.11}$$

4개 중에 어느 두 개를 독립으로 볼 것인가

(2)번째 해석을 따르자

$C$는 임의의 폐곡선

$$\oint_C [pdq - PdQ] = 0 = \oint_C dF_1(q,Q) \tag{6.12}$$

$$\downarrow$$

$$\text{Potential 함수의 존재를 의미} \tag{6.13}$$

$q$와 $Q$를 독립으로 보고

$$p = p(q,Q), \quad P = P(q,Q) \tag{6.14}$$

$$\oint_C dF_1(q,Q) = \oint_C \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ\right) \tag{6.15}$$

$$\therefore p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \tag{6.16}$$

임의의 변환이면 2 개의 함수가 필요하다. 면적보존 조건으로 말미암아 1개의 함수 $F_1(q,Q)$가 변환을 명시하는데 요하게 된다. $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$ 대신 $F_1$을 명시 $\rightarrow$ 면적보존

식 (6.16)을 $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$ 모양으로 바꿀려면 $p = \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q}$을 $Q$에 대해서 풀어서 $Q = Q(q,p)$의 꼴로 써야 한다. 이 $Q$를 $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$에 대입하면 $P = P(q,p)$를 얻는다.

이것은

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \neq 0 \rightarrow \text{국소적으로 가능} \tag{6.17}$$

$F_1(q,Q)$가 일반적으로는 다가함수 (multi-valued function)로 이러한 inversion은 힘들다.

$F_1$에 의한 변환은 다음과 같은 변환을 할 수 없다. 좌표공간에서 $Q = e^q = f(q)$와 같은 변환을 하자면, $Q$와 $q$는 독립이 아니므로 $F_1(q,Q)$와 같은 2 변수 모함수를 만들 수 없다.

그러나, 원래 면적보존 조건

$$\oint_C [pdq - PdQ] = 0\text{에서} \tag{6.18}$$

$$\oint_C [pdq - Pf'(q)dq] = 0 \tag{6.19}$$

$C$가 임의의 곡선

$$p = Pf'(q), \quad p = Pe^q \tag{6.20}$$

$$Q = e^q, \quad P = pe^{-q} \tag{6.21}$$

$$J = \begin{vmatrix} e^q & 0 \\ -pe^{-q} & e^{-q} \end{vmatrix} = 1 \tag{6.22}$$

일반적으로 다른 종류의 모함수를 찾아 변환식을 찾아낼 수 있다.

$$\oint_C d(P \cdot Q) = 0 \tag{6.23}$$

$$\downarrow$$

$$\oint QdP + \oint PdQ = 0 \tag{6.24}$$

$$\oint PdQ = -\oint QdP \tag{6.25}$$

$$\oint_C (pdq + QdP) = \oint_C dF_2 = 0 \tag{6.26}$$

$$F_2 = F_1 + PQ \tag{6.27}$$

$$F_2(q,P) = F_1(q,Q) + PQ \tag{6.28}$$

$$P = -\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q}(\text{Legendre 변환}) \tag{6.29}$$

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} \tag{6.30}$$

$$F_2=Pf(q) \tag{6.31}$$

$$p=Pf'(q),\quad Q=f(q) \tag{6.32}$$

$$f(q)=q\rightarrow \text{identity transformation} \tag{6.33}$$

$$\oint d(p\cdot q)=0\rightarrow \oint d(F_1-pq)=0 \tag{6.34}$$

$$\oint(pdq-PdQ)-\oint pdq-\oint qdp=0 \tag{6.35}$$

$$\therefore \oint[-PdQ-qdp]=\oint dF_3=0 \tag{6.36}$$

$$F_3(p,Q)=F_1(q,Q)-pq,\quad p=\frac{\partial F_1}{\partial q} \tag{6.37}$$

$$p=-\frac{\partial F_3}{\partial Q},\quad q=-\frac{\partial F_3}{\partial p} \tag{6.38}$$

$$\oint d(F_1+PQ-pq)=\oint dF_4=\oint[QdP-qdp] \tag{6.39}$$

$$F_4(p,P)=F_2(q,P)-pq,\quad p=\frac{\partial F_2}{\partial q} \tag{6.40}$$

$$q=-\frac{\partial F_4}{\partial p},\quad Q=\frac{\partial F_4}{\partial p} \tag{6.41}$$

$(q,p)\rightarrow(Q,P)$의 변환을 좌표계에 의한 변화

$$K(Q,P)=H(q(Q,P),p(Q,P)) \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} && (6.43)\\
&= \frac{\partial Q}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)+\frac{\partial Q}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) && (6.44)\\
&= \frac{\partial Q}{\partial q}\left(\frac{\partial K}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}+\frac{\partial K}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}\right)-\frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial K}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}+\frac{\partial K}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}\right) && (6.45)\\
&= \frac{\partial K}{\partial P}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) && (6.46)
\end{aligned}$$

$$\dot{P}=\frac{\partial P}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial P}{\partial p}\dot{p}=\cdots=-\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{6.47}$$

새 좌표계 $(Q,P)$의 Hamiltionian $K(Q,P)$는 $H(q,p)$에다 $q=q(Q,P)$, $p=p(Q,P)$를 대입한 것과 상수항을 제외하고는 같다.

## 6.3 시간에 의존하는 변환

$F(q,Q,t)$를 구해서

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \tag{6.48}$$

의 모양의 변환식을 얻으면 이를 뒤집어서 $Q = Q(q,p,t)$, $P = P(q,p,t)$와 같이 시간 의존 변환식을 얻는다.

시간에 의존하는 변환에서도

정준변환 $\leftrightarrow$ 면적보존

시간을 고정시킨 좌표변환, 시간을 외부매개변수로 간주할 수 있다.

$t$를 외부매개변수로 보면 앞 절의 논리를 그대로 되풀이하여

$$p = \frac{\partial F_1(Q,q,t)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1(Q,q,t)}{\partial Q} \tag{6.49}$$

$$p = \frac{\partial F_2(P,q,t)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2(P,q,t)}{\partial P} \tag{6.50}$$

$$F_2(P,q,t) = F_1(Q,q,t) + PQ \tag{6.51}$$

$Q$는 $Q(P,q)$의 함수로 본다. 즉, $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$를 풀어서 $F_1$, $F_2$의 시간변화율

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial t}\right|_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{6.52}$$

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial t}\right|_{p,q} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t} + Q\frac{\partial P}{\partial t} + P\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{6.53}$$

식 (6.52) - (6.53)

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_3}{\partial t} = \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{6.54}$$

새좌표계의 Hamiltonian $K(Q,P,t)$

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{6.55}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{6.56}$$

$$H(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P)) \tag{6.57}$$

chain rule 적용

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P}(H + \frac{\partial F_2}{\partial t}) \tag{6.58}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q}(H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{6.59}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial F_3}{\partial t} = \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{6.60}$$

$$K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P)) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{6.61}$$

시간의존 정준 변환은 $F_i$의 모함수를 명시하여 주어진 rule에 의해서 변환식을 얻고 새 Hamiltonian

$$K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t} \tag{6.62}$$

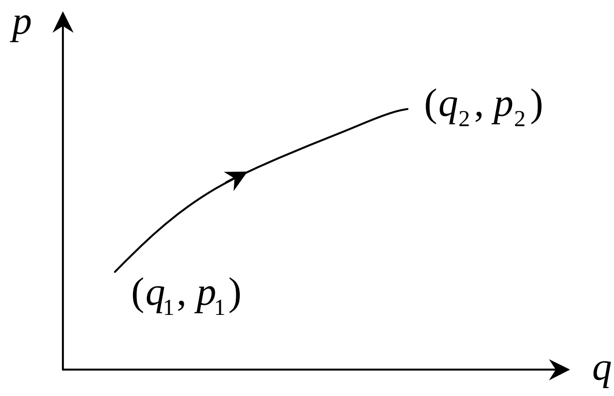
로 정의하면 정준변환된다.

$$\begin{matrix} Q = Q(q,p) \rightarrow \\ P = P(q,p) \leftarrow \end{matrix} \; F_i(\alpha, A, t) \tag{6.63}$$

$$K(Q,P,t) = H(q,(Q,P), p(Q,P)) + \frac{\partial F_i}{\partial t} \tag{6.64}$$

## 6.4 변환 이론의 몇가지 보기

●**보기 1** 정준변환은 역학적 상태의 시간적 진전을 표할 수 있다.




$$q_2 = q_2(q_1, p_1), \quad p_2 = p_2(q_1, p_1) \tag{6.65}$$

$F_1(q_1, q_2)$가 존재해서

$$p_1 = \frac{\partial F_1(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \quad p_2 = -\frac{\partial F_1(q_1, q_2)}{\partial q_2} \tag{6.66}$$

로 변환식을 얻음

time-evolution은 area-preserving

●**보기 2**

$$Q = \ln(\frac{\sin p}{q}), \quad P = q \cot p \tag{6.67}$$

가 정준변환임을 보이고 모함수 $F_1(q, Q)$, $F_2(q, P)$를 구하라.

$$PdQ = q \cot p[\cot p dp - \frac{dq}{q}] \tag{6.68}$$

$$= q \cot p[dQ - \frac{dq}{q}] \tag{6.69}$$

$$pdq - PdQ = pdq - q \cot^2 p dp + \cot p dq \tag{6.70}$$

$$= pdq + qdp - q(\cot^2 p + 1)dp + \cot p dq \tag{6.71}$$

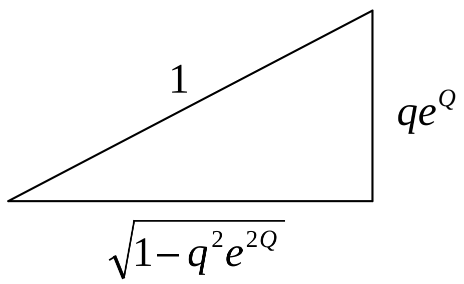
$$= d[pq + q \cot p] = dF_1 \tag{6.72}$$

$$d(q\cot p) = \cot p dq - q\frac{1}{\cot^2 p}dp \tag{6.73}$$

$$F_1(Q,q) = pq + q\cot p \tag{6.74}$$

$p = \sin^{-1}(qe^Q)$로 대입

$$F_1(Q,q) = q\sin^{-1} qe^Q + [e^{-2Q} - q^2]^{1/2} \tag{6.75}$$




$$F_2(q,P) = F_1(q,Q) + PQ \tag{6.76}$$

$$p = \cot^{-1}\frac{P}{q} = \tan^{-1}\frac{q}{P} \tag{6.77}$$

$$Q = \ln\frac{\sin\tan^{-1}\frac{q}{P}}{q} = -\frac{1}{2}\ln(q^2+P^2) \tag{6.78}$$

$$F_2(q,P) = q\tan^{-1}(q/P) + P[1 - \frac{1}{2}ln(q^2+P^2)] \tag{6.79}$$

- **보기 3**

$F_1(Q,q) = \lambda q^2\cot Q$에 의해서 생성되는 변환을 구하고 $(q,p)$ 표현에서 Hamiltonian이

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{6.80}$$

가 된다한다면 $(Q,P)$ 표현에서 $K(P,Q)$가 어떻게 되는가?

$\lambda$를 취하여 $K(Q,P)$를 $P$만의 함수로 만들어라

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2\lambda q \cot Q && (6.81)\\
P &= \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \lambda q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} && (6.82)
\end{aligned}
$$

또는

$$
\begin{aligned}
q &= \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{1/2} \sin Q && (6.83)\\
p &= 2(\lambda P)^{1/2} \cos Q && (6.84)
\end{aligned}
$$

따라서

$$p^2 = 4\lambda^2 q^2 \cot^2 Q = 4\lambda^2 q^2 \frac{\cos^2 Q}{\sin^2 Q} \qquad (6.85)$$

$$K(P,Q) = P(\frac{2\lambda}{m}\cos^2 Q + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{\lambda}\sin^2 Q) \qquad (6.86)$$

$\lambda = \frac{1}{2}m\omega$로 선택

$$K(P,Q) = \omega P = E \qquad (6.87)$$

$$\dot{P} = 0 \rightarrow P = \text{const.} \qquad (6.88)$$

$$\dot{Q} = \omega \rightarrow Q = \omega t + Q_0 \qquad (6.89)$$

$$P = E/\omega \qquad (6.90)$$

$$q = \frac{1}{\omega}\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} sin(\omega t + \delta), \quad p = (2mE)^{1/2}\cos(\omega t + \delta) \qquad (6.91)$$

**•보기 4.**

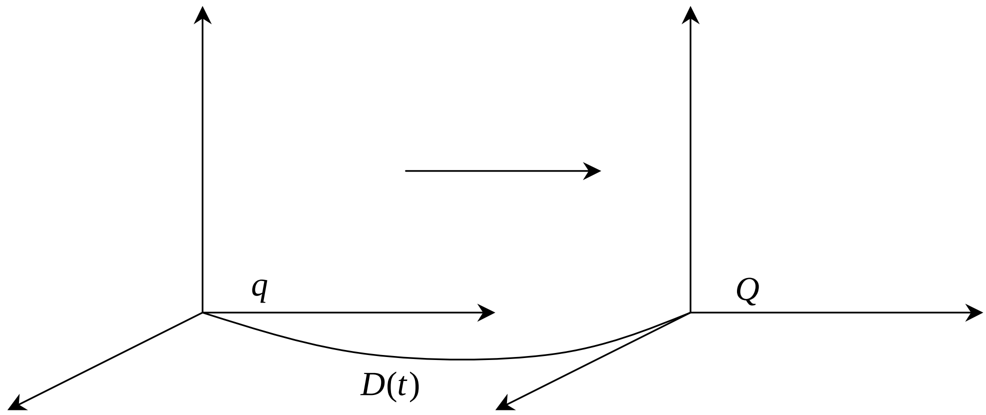
$F_1(Q,q,t) = q(Q^2 + t^2)$을 보기로 삼아 $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t}$를 검증하라.

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -2qQ, \quad Q = \frac{P}{2q} \qquad (6.92)$$

$$F_2(P,q,t) = q(\frac{P^2}{4q^2} + t^2) + P(-\frac{P}{2q}) \qquad (6.93)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = 2qt \qquad (6.94)$$

●**보기 5.** 고정된 좌표계에서 운동좌표계로의 변환




$$Q(t) = q - D(t) \tag{6.95}$$

$$F_2(P, q, t) = P(q - D(t)) \tag{6.96}$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P \tag{6.97}$$

$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$라 하자.

$$\begin{aligned} K(Q,P,t) &= \frac{P^2}{2m} + V(Q - D(t)) + \frac{\partial F_2}{\partial t} && (6.98) \\ &= \frac{P^2}{2m} + V(Q - D(t)) + P\dot{D} && (6.99) \end{aligned}$$

운동방정식:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\partial V(Q - D(t))}{\partial Q} && (6.100) \\ \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{m} - \dot{D} && (6.101) \end{aligned}$$

$$m\ddot{Q} = -\frac{\partial V(Q - D)}{\partial Q} - m\ddot{D} \tag{6.102}$$

$-m\ddot{D}$는 가속좌표계에서 겉보기 힘이다.

$$\ddot{D} = 0 \rightarrow \text{관성좌표계} \tag{6.103}$$

정준변환은 군 (gp)을 형성한다. $(q,p) \to (Q,P)$의 역변환 $(Q,P) \to (q,p)$도 정준변환

두 개의 정준변환을 겹쳐도 면적보존 $\to$ 정준변환

$$T_1 T_2 = T_3 \tag{6.104}$$

$$T = I, \quad F_2 = qP : \text{identity} \tag{6.105}$$

$$T_1 T_2 T_3 = (T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3) (\text{associative}) \tag{6.106}$$

이 중에서도 흥미있는 변환은 identity 변환 근방에서의 변환이다.

$$F_2(q,P) = Pq + \varepsilon W(q,P,\varepsilon) \tag{6.107}$$

$\varepsilon$은 작은 수

변환식:

$$\begin{aligned} p &= P + \varepsilon \frac{\partial W(q,P,\varepsilon)}{\partial q} \qquad (6.108) \\ Q &= q + \varepsilon \frac{\partial W(q,P,\varepsilon)}{\partial P} \qquad (6.109) \end{aligned}$$

$\varepsilon$의 1차 근사로 이 변환식은

$$\begin{aligned} Q &= q + \varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p} \qquad (6.110) \\ P &= p - \varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q} \qquad (6.111) \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 여기서

$$G(q,p) = \lim_{\varepsilon \to 0} W(q,p,\varepsilon) \tag{6.112}$$

이것은 무한소 정준변환의 생성자 (generator)라 부른다. $F_2$와 다른 뜻을 갖고 있음.

이 때, 이 변환식의 $Q$, $P$를 $\varepsilon$의 함수로 보고 $\varepsilon$으로 미분한 다음 $\varepsilon \to 0$의 극한을 취하라.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial G(q,p)}{\partial p} \to (\varepsilon \to 0) \frac{\partial G(Q,P)}{\partial P} && (6.113) \\ \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial G(q,p)}{\partial q} \to (\varepsilon \to 0) \frac{\partial G(Q,P)}{\partial Q} && (6.114) \end{aligned}$$

이 식은 Hamiltonian 운동방정식과 같다.

$$\therefore \varepsilon = \delta t\text{로 잡으면,} G = H(q,p) H\text{는 무한소 생성자} \tag{6.115}$$

$(q(t), p(t)) \to (q(t+\delta t), p(t+\delta t))$로 가는 위상 흐름을 생성하는 생성자라 할 수 있다.

$\theta : t \times M \to M$ defined by $y^i = h^i(t, x^1, \cdots, x^n)$

$X$: the infinitesimal generator of $\theta$

$$X = \sum \dot{h}^i(0, x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.116}$$

Ex. $\theta : R \times R^2$ defined by

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{6.117}$$

$$\therefore X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \tag{6.118}$$

$\therefore$ integral curve of $X$: circle