Chapter 5

Lagrangians

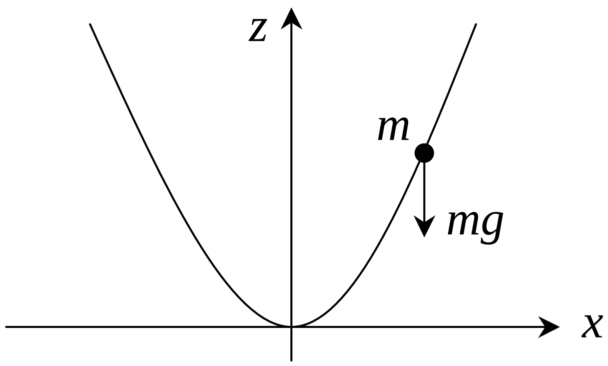
5.1 Lagrangian계

(1) Hamiltonian 계의 도입

$$p = m\dot{q} = m\frac{dq}{dt} \tag{5.1}$$

로 놓고, Newton 방정식 → Hamiltonian 방정식

이 방법은 일반적인 방법이 못된다.



$z = \cosh x$인 공선 모양의 철사를 타고 미끌어지는 구슬의 운동

운동방정식 $\quad \ddot{x}\,\cosh x + \dot{x}^2\,\sinh x + g\,\tanh x = 0 \quad (5.2)$

$p = m\dot{x}$로 놓으면 (5.3)

$$\dot{x} = \frac{p}{m} = v_x = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{5.4}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = v_p = -\frac{m^2 g\,\tanh x + p^2\,\sinh x}{m\,\cosh x} \tag{5.5}$$

이들은 (x, p) 공액변수가 못된다.

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial p} = 0 \tag{5.6}$$

$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_p}{\partial p}$가 되어야 한다. ($v_x = \frac{\partial H}{\partial p}, v_p = -\frac{\partial H}{\partial x}$)

이 문제에서는

$$\tfrac{\partial v_x}{\partial x}(=0) \neq -\tfrac{\partial v_p}{\partial p}(\neq 0) \tag{5.7}$$

$$\therefore \text{공액변수 (X)} \tag{5.8}$$

$$\therefore H(\text{X}) \tag{5.9}$$

나중에 보이는 바와 같이

$$p = m\dot{x} \sinh x \tag{5.10}$$

으로 정의하면

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m \cosh^2 x} + mg \cosh x \tag{5.11}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m \cosh^2 x} = v_x \tag{5.12}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = v_p \tag{5.13}$$

가 되고, (x,p)는 정준 공액변수가 된다.

(2) 이러한 경우 Lagrangian 역학계를 만들고 이어서 Hamiltonian 계를 형성하는 것이 보통

Hamiltonian 형식과 Lagrangian 형식의 변환관계

기하학적 고찰

Legendre 변환에 의해서 Lagrangian과 Hamiltonian이 변환되는데 이것을 접선변환

$$L(q,\dot{q}), \;\; \dot{q} = u(\text{generalized velocity}) \rightarrow L(q,u,t) \tag{5.14}$$

$$\downarrow$$

$$H(q,p) \tag{5.15}$$

Hamilton's eq. of motion

$$u = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{5.16}$$

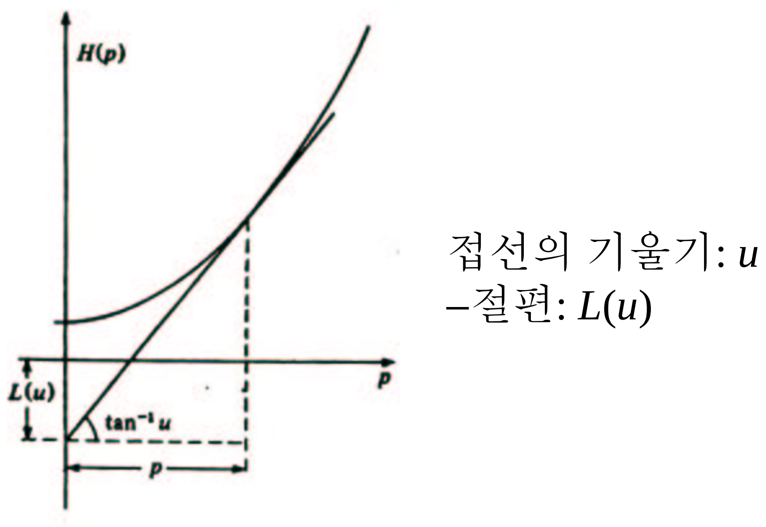
$H(q,p,t)$의 함수 당분간 q,t를 supress하고 $H(p)$로만 쓰자.

H를 specify하려면

(0) $H \to L$

(1) H를 정의하거나

(2) $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}$ (convex) > 0라 하자. $u = \frac{\partial H}{\partial p}$와 접선이 H축과 만나는 교점 $L(u)$를 준다.



$$u = \frac{H(p) - \text{절편}}{p} = \frac{H(p) + L(u)}{p} \tag{5.17}$$

q와 t를 표출

$$L(q,u,t) = pu - H(q,p,t) \tag{5.18}$$

가 되어서

$$\frac{\partial L}{\partial p} = u - \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \tag{5.19}$$

$L(q,\dot{q},t)$를 얻는다.

(우변의 p는 $u = \frac{\partial H}{\partial p}$를 통해 u와 t의 함수로 바꿔 놓는다.)

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q,t) \quad (\frac{p^2}{2m} = T) \tag{5.20}$$

일 때, $L =?$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = u, \quad p = mu, \tag{5.21}$$

$$L = pu - H = T - V \tag{5.22}$$

L에서 H로 변환할 때 H가 convex이면 L도 convex

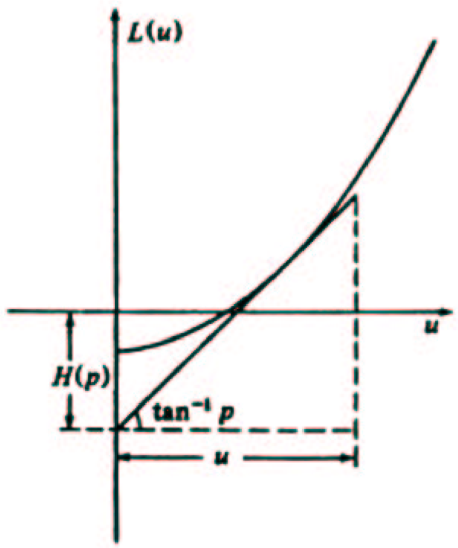
$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u} = 1 \tag{5.23}$$

$$\therefore H : \text{convex} \rightarrow \therefore L : \text{convex} \tag{5.24}$$

L을 specify할 때 $L(u)$를 줄 수도 있고, $p = \frac{\partial L}{\partial u}$와 이 기울기 p와 L축의 교점 H를 specify할 수도 있다.

$$L(q,u,t) = pu - H(q,p,t) \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = p + (u - \frac{\partial H}{\partial p})\frac{\partial p}{\partial u} = p \tag{5.26}$$



$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}u + p - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u} = p \quad (\frac{\partial H}{\partial p} = u) \tag{5.27}$$

$$\frac{H+L}{u} = p, \quad H+L = up \tag{5.28}$$

$H = up - L$, u는 $p = \frac{\partial L(u,q,t)}{\partial u}$를 통해서 p와 q의 함수로 바꿔 놓는다.

Lagrangian 운동방정식

$$\frac{\partial L}{\partial q} = u\frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{5.29}$$

$$L(q,u,t), \quad u = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{5.30}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right) \tag{5.31}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{5.32}$$

5.2 Lagrangian계의 몇가지 보기

보기 1. Lagrangian L과 $\bar{L}$는 q와 t의 임의의 함수 $f(q,t)$의 전미분계수 $\frac{d}{dt}f(q,t)$만큼 차이가 있다. L과 $\bar{L}$에 대한 운동방정식은 불변이다.

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L + \frac{df}{dt} \qquad (5.33) \\ &= L + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (5.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial q} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) \qquad (5.35) \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \qquad (5.36) \end{aligned}$$

(5.35)-(5.36),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{5.37}$$

이 관계는 시간에 의존하는 Lagrangian 방정식을 간소화시키는데 유용하다.

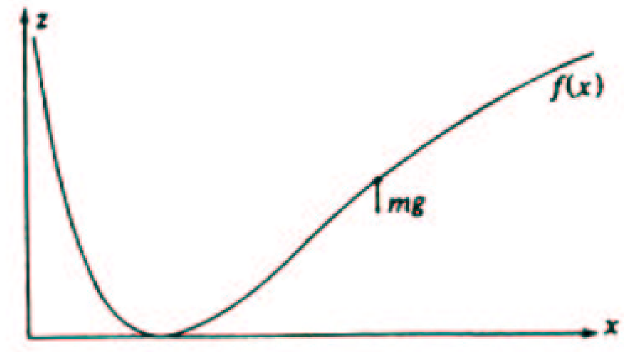
주의: 이 두 Lagrangian은 서로 다른 운동량을 정의하고 서로 다른 Hamiltonian을 형성.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad \bar{p} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} \tag{5.38}$$

라면,

$$\bar{p} = p + \frac{\partial f}{\partial q} \quad (f\text{가 } t\text{만의 함수}) \tag{5.39}$$

보기 2. 질량 m인 구슬이 $z = f(x)$라는 곡선모양의 철사를 따라 미끌어지는 운동



x를 일반화좌표로 쓰고 $\dot{x}$: 일반화된 속도

$$L = T - V \tag{5.40}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + f'^2(x)) \tag{5.41}$$

$$V = mgf(x) \tag{5.42}$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + f'^2(x)) - mgf(x) \tag{5.43}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{x}[1 + f'^2(x)] \tag{5.44}$$

Hamiltonian은

$$H(x,p) = \dot{x}p - \{\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+f'^2(x)) - mgf(x)\} \tag{5.45}$$

Lagrange's eq. of motion:

$$\ddot{x}[1+f'^2(x)] + \dot{x}^2 f'(x) - f''(x) + gf'(x) = 0 \tag{5.46}$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m(1+f'^2(x))} \tag{5.47}$$

$$H = \frac{p^2}{2m(1+f'^2(x))} + mgf(x) = T + V \tag{5.48}$$

$f(x) = \cosh x$

$$H = \frac{p^2}{2m} + mg\cosh x \text{가 되고 운동상수} \tag{5.49}$$

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{x}^2\cosh^2 x + mg\cosh x \tag{5.50}$$