Chapter 4

Conservative Hamiltonian Systems of One Degree of Freedom

4.1 Hamiltonian 역학계

1차원 역학계

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2q}{dt^2} &= F(q,t) &(4.1)\\
\frac{dq}{dt} &= \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = F &(4.2)\\
\vec{r} &= (q,p)(\text{위상공간}), \quad \vec{v} = (\frac{p}{m}, F)(\text{속도장}) &(4.3)
\end{aligned}
$$

1차원인 경우 F는 항상 potential 함수로부터 유도된다.

$$
\begin{aligned}
V(q,t) &= -\int_{q_0}^{q} F(q',t)dq' &(4.4)\\
& -\frac{\partial V}{\partial q} = F, \quad \frac{p}{m} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) &(4.5)
\end{aligned}
$$

$$\text{Def.:}H = \frac{p^2}{2m} + V(q,t) : \text{Hamiltonian 함수} \tag{4.6}$$

운동방정식은

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} : \text{Hamilton's eq.} \tag{4.7}$$

이러한 운동방정식에 의해서 지배하는 계를 Hamiltonian 역학계라고 한다.

따라서, 속도장은

$$\vec{v} = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}) \tag{4.8}$$

전기계(회로 방정식), 생물학적계, 경제학적계에도 Hamiltonian 계가 있다.

(q,p): 일반화된 좌표, 그 공액 운동량

$H(q,p,t)$가 시간의 함수가 아니면

$$H = H(q,p) : \text{autonomous Hamiltonian system} \tag{4.9}$$

보존계의 Hamiltonian 함수값의 변화를 보자. (운동을 따라서 일어나는)

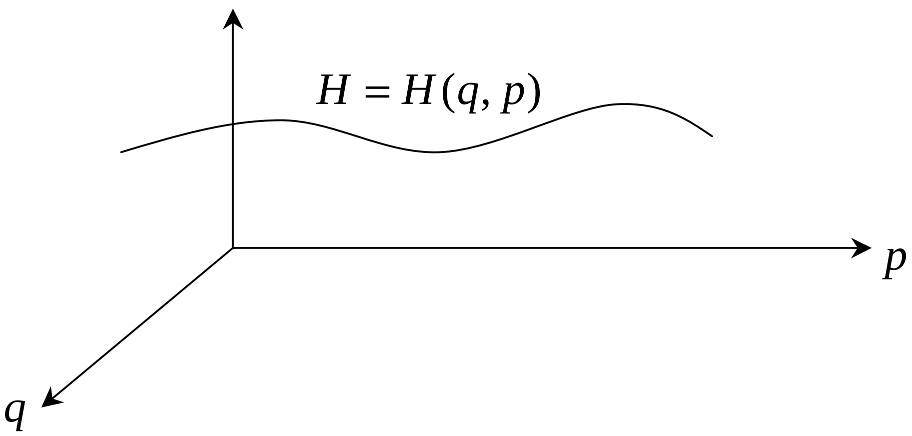
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{4.10}$$

이 되어 운동에 따르는 Hamiltonian 함수값은 보존된다. 이러한 의미에서 보존계

$\therefore$ <u>등 Hamiltonian 선은 불변집합</u>

Newton 역학계인 경우 $H = E$(총에너지)

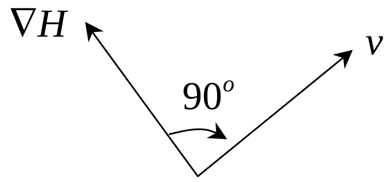
Hamiltonian 함수 2차원 위상평면에서 그리고 그 기울기를 보자.



$$\begin{aligned}\nabla H &= \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) \text{ 이 기울기는 } \vec{v}\text{와 서로 직교, 그 크기는 같다.} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla H \end{aligned} \tag{4.11}$$

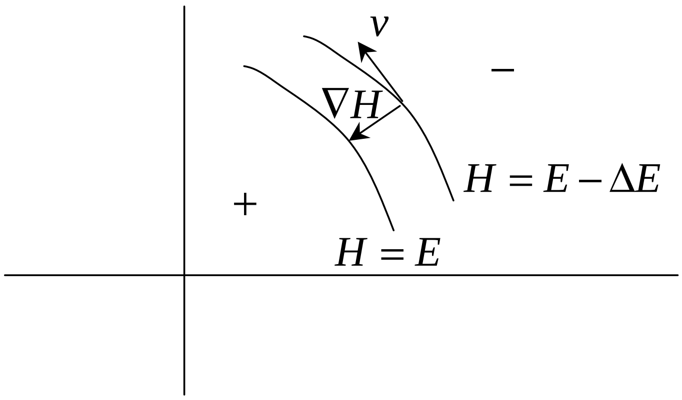
$\vec{v}$는 기울기 ∇H를 -90° 회전시킨 것이다.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad -\theta = 90^\circ \tag{4.12}$$



위의 사실을 종합하면, Hamiltonian 계의 phase flow를 쉽게 그릴 수 있다.

- 먼저 $H(q,p)$의 등고선을 그려라.



Phase flow는 등고선을 따른다. Flow의 sense는 낮은 에너지쪽 (-)을 오른쪽에 끼고 흐른다.

∇H: 등고선에 직각이고 높은 에너지쪽을 향하고 그 크기는 $H = E$와 $H = E - \Delta E$ 사이의 거리를 Δl이라고 하면

$$|\nabla H| = \frac{\Delta E}{\Delta l} \tag{4.13}$$

$\therefore$ 이웃하는 두 등고선 사이의 ΔE는 flow를 따르면서 불변이므로

Δl이 크면 $|\vec{v}|$는 작고 Δl이 작으면 $|\vec{v}|$는 크다.

부동점

$\nabla H = (\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}) = 0$되는 점을 정상점 (stationary point)이라 하는 Hamiltonian 함수의 정상점을 위상흐름의 부동점이 된다.

$$\nabla H - 0 \rightarrow \vec{v} = 0 \tag{4.14}$$

부동점과 H-등고선은 Hamiltonian 역학계 총괄적 양상을 준다.

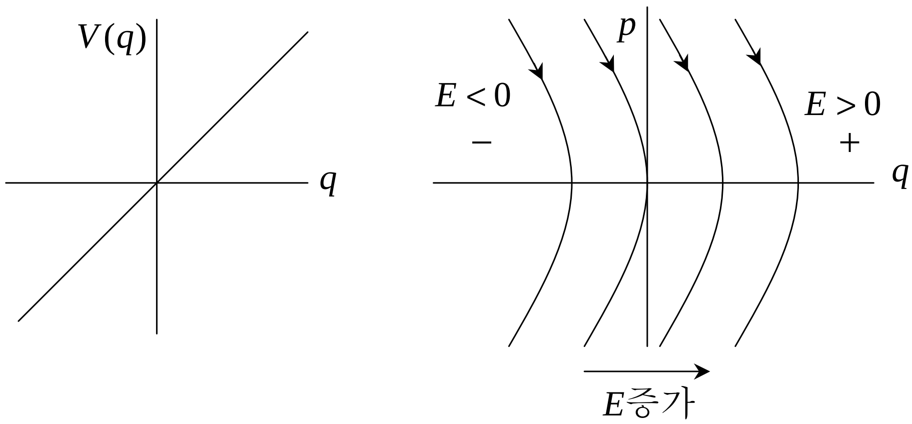
4.2 간단한 보기

보기 1. 상수역장

$$F = \text{const.} = -a \tag{4.15}$$

$$V(q) = aq(a > 0) \tag{4.16}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + aq = E \tag{4.17}$$



$$q = -\frac{p^2}{2ma} + \frac{E}{a} \tag{4.18}$$

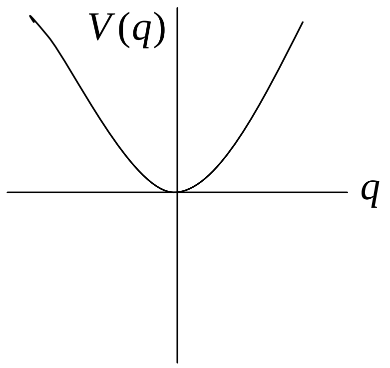
$|p|$가 증가할수록 $|v|$는 커짐, 등고선 간격이 좁아짐.

보기 2. F가 q의 선형함수

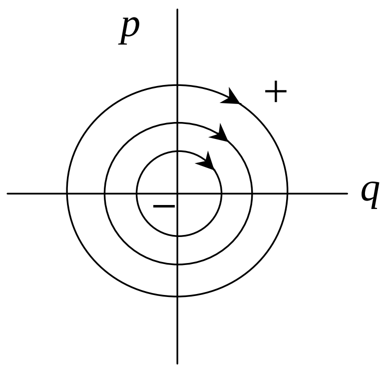
a) $F = -aq$ linear attraction

b) $F = aq$ linear repulsion

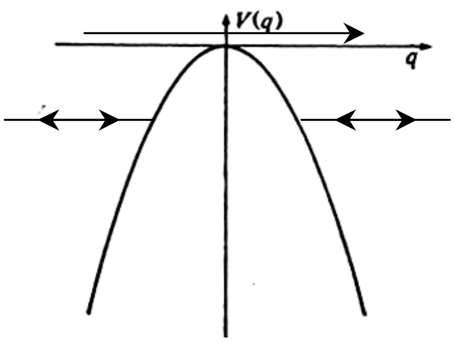
a) $V = \frac{a}{2}q^2$



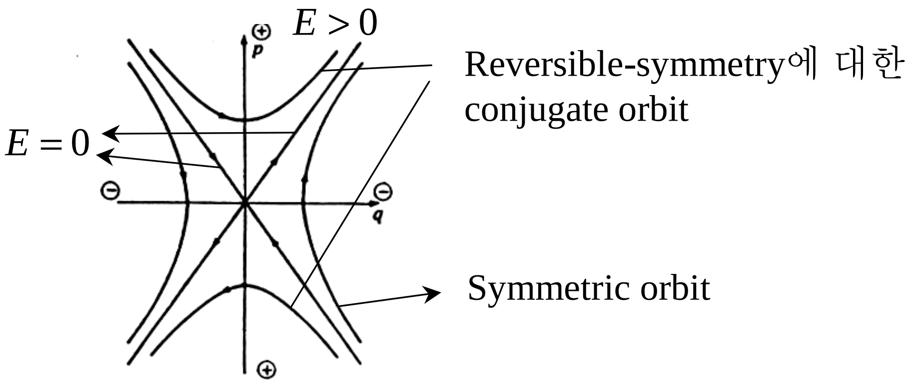
$$H = \frac{p2}{2m} + \frac{a}{2}q^2 \tag{4.19}$$



b) $F = aq \rightarrow V = -\frac{a}{2}q^2$



$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} - \frac{a}{2}q^2 = E & (4.20) \\ 2mE &= p^2 - m^2\gamma^2 q^2, \quad \gamma^2 = a/m & (4.21) \\ &= (p + m\gamma q)(p - m\gamma q) & (4.22) \end{aligned}$$



(0,0)은 부동점이고 불안정 쌍곡선 점

쌍곡선점에 와닿은 두개의 직선은 전혀 다른 성질의 운동을 갈라놓는다.: 분계선(separatrix)

Newton 방정식

$$
\begin{aligned}
\ddot{q} &= \gamma^2 q && (4.23)\\
q &= A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t} && (4.24)\\
p &= m\gamma(A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t}) && (4.25)\\
E &= -2m\gamma^2 A_+ A_- && (4.26)
\end{aligned}
$$

A_+와 A_-의 부호가 운동의 양상을 정한다.

보기 3. 3차식 potential 함수

$$V(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2 - \frac{1}{3}Aq^3 \quad (A > 0) \tag{4.27}$$

$q = 0$에서 중근을 갖고 $q = 3\omega^2/2A$에서 다른 근을 갖는다.

$$F(q) = -\frac{\partial V}{\partial q} = \omega^2 q - Aq^2 - 0 \tag{4.28}$$

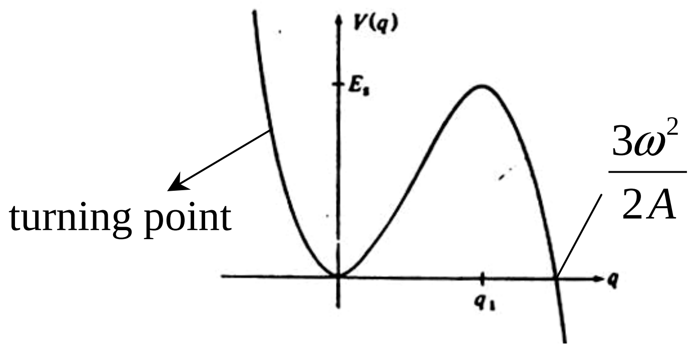
이 되는 점이 ($p = 0$와 함께) 정상점을 준다.

$$\text{정상점:} \quad \vec{r} = (\vec{q}, \vec{p}), \vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}) = 0 \tag{4.29}$$

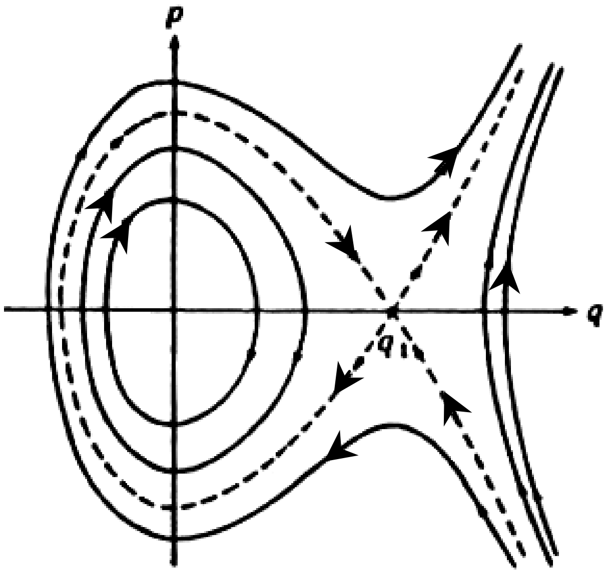
$q=0$와 $q=q_1=\frac{\omega^2}{A}$가 부동점이 된다.

$q=0$ 근방에서는 V의 Aq^3항을 무시할 수 있으므로 보기 2 a)에서 본 타원점

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}=\omega^2-2Aq|_{q=q_1}=\omega^2-2\omega^2<0 \tag{4.30}$$



보기2 b)에서 본 쌍곡선 점

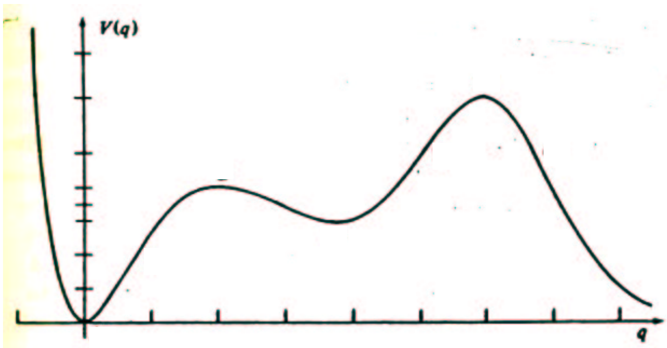


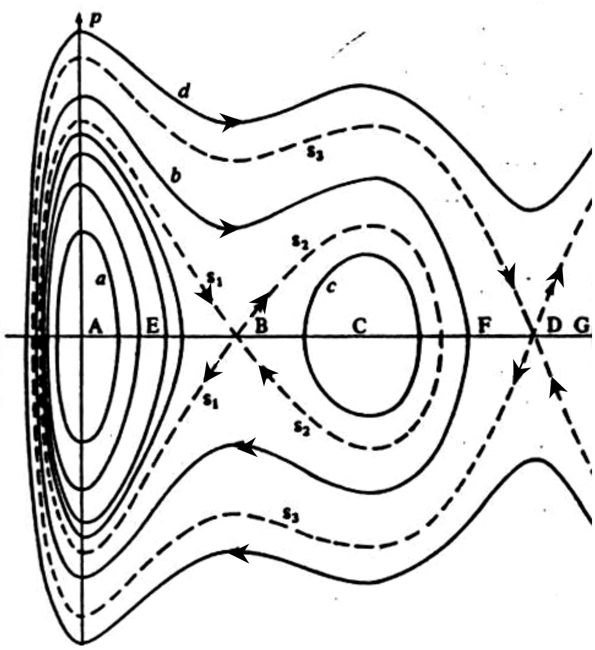
모든 orbits이 symmetric orbits

4.3 일반적 운동

4.3.1 일반적 potential

Stationary point: phase velocity $= \vec{0}$인 점. $\rightarrow$ H의 stationary point.





일반적으로 실수 2변수 함수 $H = H(q,p)$의 stationary point는 극대, 극소는 타원점, 안장점은 쌍곡선점을 준다.

$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$인 꼴에서는 극대는 생기지 않는다.

$V(q)$의 극소: 타원점 $\rightarrow$ H의 극소 $\rightarrow$ Hamiltonian 계의 타원점 근방의 phase flow는 시계바늘방향

$V(q)$의 극대: 쌍곡선점 $\rightarrow H$의 saddle

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & V''(q) \end{pmatrix} \rightarrow \Delta = \frac{V''(q)}{m} \tag{4.31}$$

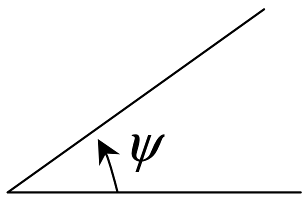
$\Delta > 0 \rightarrow \frac{1}{m} > 0$이므로 극소,

$\Delta < 0 \rightarrow$ saddle point

4.3.2 위치공간에서의 회전운동

실수 위치공간에서의 운동이 항상 $(-\infty, \infty)$에서 일어날 필요는 없다.

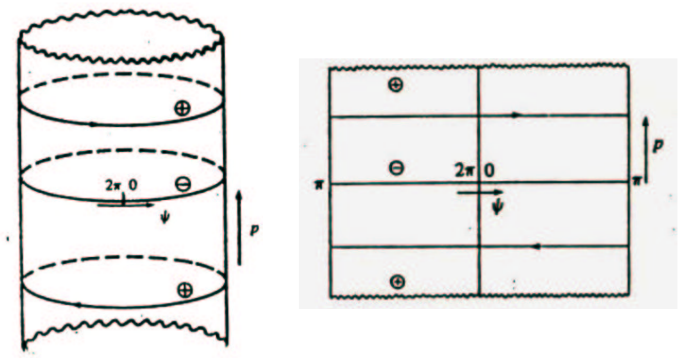
자유회전운동을 보면



$$H = \frac{p^2}{2G} \quad G: \text{관성능률} \tag{4.32}$$

회전각 ψ를 잡아주면, ψ는 $\{0, 2\pi\}$ 사이에서 운동 따라서 위치공간은 원. 그 구간의 양끝만 명시해 주면 된다.

그 공액운동량 각 운동량 p는 얼마든지 클 수 있다. 위상운동은 기다란 원통



$\psi = \pi$되는 선을 잘라서 펴보면 기다란 유한폭을 가진 평면

$p = 0$ ψ는 임의가 부동점. 이 부동점은 타원점도 쌍곡선 점은 아님.

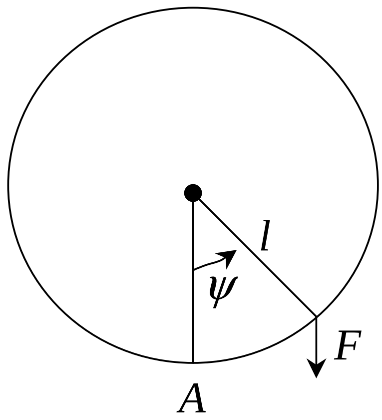
이러한 고립부동점의 부재는 이들 부동점이 구조적으로 불안정하다는 것을 예고하고 있다.

4.3.3 면적 흔들이

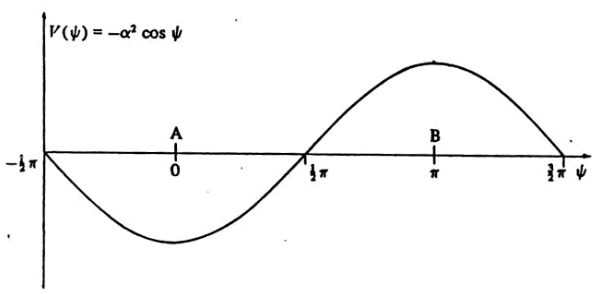
자유회전에 작은 섭동 $V(\psi)$: ψ의 주기 함수 (2π 주기)

$$H = \frac{p^2}{2G} + V(\psi) \tag{4.33}$$

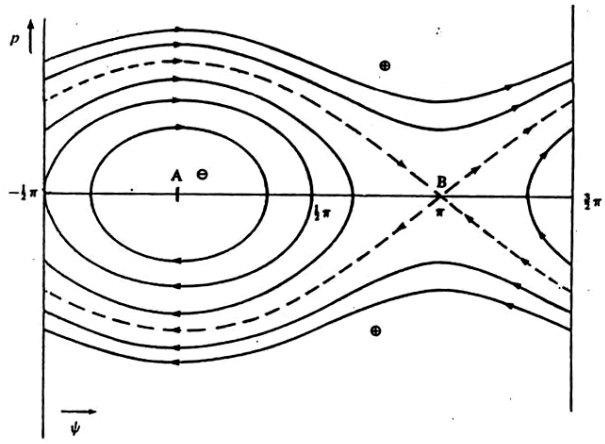
$$V(\psi) = -Fl\cos\psi \tag{4.34}$$



$$H(\psi, p) = \frac{p^2}{2} - \alpha^2\cos\psi, \quad \alpha^2 = Fl \tag{4.35}$$



$$\dot{\psi} = p, \quad \dot{p} = -\alpha^2\cos\psi \tag{4.36}$$



α^2이 아무리 작아도 타원점과 쌍곡선점이 된다.

∴ 보기 **4.3.2**는 구조적 불안정

Rotation이나 libration은 주기 운동으로 그 주기

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = E \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} p &= \pm[2m(E-V)]^{1/2} && (4.38) \\ \dot{q} &= \frac{p}{m} = \pm[\frac{2}{m}(E-V)]^{1/2} && (4.39) \\ \int^t dt' &= \pm(\frac{m}{2})^{1/2}\int^q \frac{dq'}{\sqrt{E-V(q')}} && (4.40) \end{aligned}$$

회전운동

$$T = \int_0^T dt' = (\frac{m}{2})^{1/2}\left|\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{E-V(q')}}\right| \tag{4.41}$$

libration

$$\begin{aligned} V(q_1) &= V(q_2) = E(q_1 < q_2) && (4.42) \\ T &= 2(\frac{m}{2})^{1/2}\int_{q_1}^{q_2} \frac{d\psi}{\sqrt{E-V(q')}} && (4.43) \end{aligned}$$

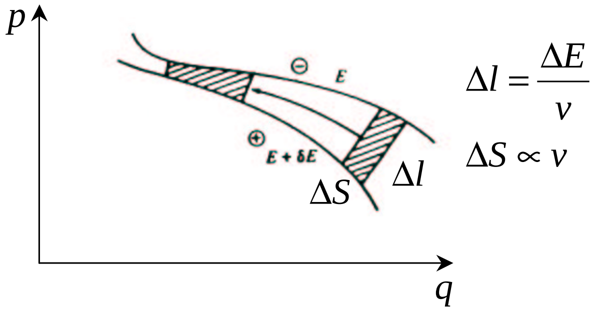
Hamiltonian 계

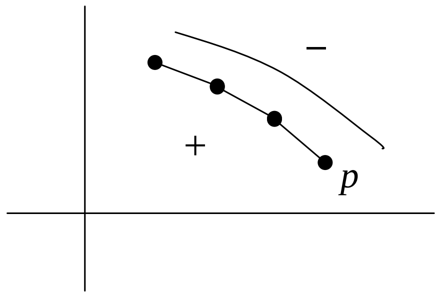
1. H-등고선 → phase flow

2. - 낮은 에너지 영역을 오른쪽에 끼고 흐른다.

3. H의 기울기 $\rightarrow |\vec{v}|$

4.4 면적보존성과 Liouville 정리





autonomous conservative system

점 p에서 같은 시간간격 Δt으로 질점을 하나씩 떨어뜨리면 속도가 큰 곳에서는 간격이 벌어지고 속도가 작은 곳에서는 질점 사이의 간격이 좁다.

그 간격 $\Delta S = v\Delta t$

$$A = \Delta S \Delta l = v\Delta t \Delta l = \Delta E \Delta t, \;\; \Delta l = \frac{\Delta E}{v} \tag{4.44}$$

ΔE, Δt는 상수이므로 Hamiltonian 흐름에서 면적보존된다. $\Delta t \rightarrow 0$

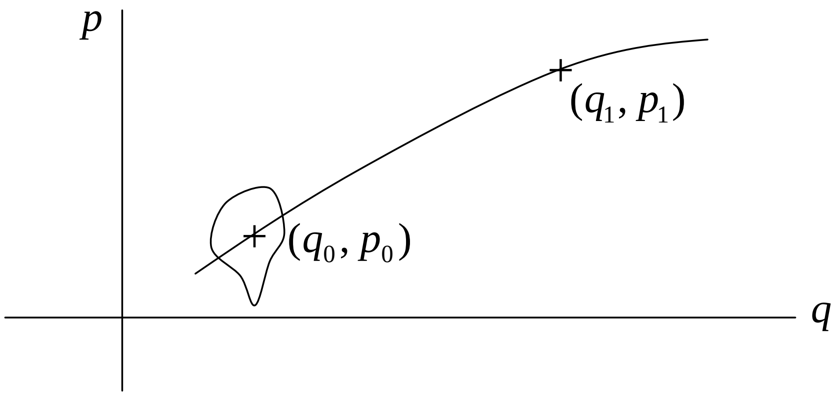
비자율계인 경우 (nonautonomous system) $H(q, p, t)$을 시간의 겉함수 (explicit function) 등고선 (=위상흐름)의 방법은 적용불가.

Hamiltonian 함수값의 운동에 따르는 시간변화를 보자.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.45}$$

이 변화량은 현 위상위치에 고정되었다고 보았을 때 이 위상위치에서의 H-함수값의 변화

즉, H=const.에 따르는 운동이 아님



(q_0, p_0), (q_1, p_1)을 어떤 운동을 따르는 특정한 위상곡선 상에 있는 시간 t_0와 t_1 때의 두 위상점이라 하자. $t_1 = t_0 + \delta t$라 놓자.

$q_1(t_1)$, $p_1(t_1)$을 다음과 같이 전개한다.

$$q_1 = q(t_0 + \delta t) = q_0 + \delta t \frac{\partial H}{\partial p_0} + O(\delta t^2) \quad (4.46)$$

$$p_1 = p(t_0 + \delta t) = p_0 - \delta t \frac{\partial H}{\partial q_0} + O(\delta t^2) \quad (4.47)$$

위 식은 고정된 t_0와 δt에 대한 (p_1, q_1)과 (p_0, q_0) 사이의 변환식

임의의 폐곡선에 둘러싸인 영역의 면적이 이 변환식에 어떻게 변하는가는 그 Jacobian 값에만 의존한다.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_0} & \frac{\partial p_1}{\partial q_0} \\ \frac{\partial q_1}{\partial p_0} & \frac{\partial p_1}{\partial p_0} \end{vmatrix} \quad (4.48)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0 \partial q_0} & -\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0^2} \\ \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_0^2} & 1 - \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0} \end{vmatrix} \quad (4.49)$$

$$= 1 + O(\delta t^2) = 1 + \delta t^2 [\frac{\partial^2 H}{\partial p_0^2} \frac{\partial^2 H}{\partial q_0^2} - (\frac{\partial^2 H}{\partial q_0 \partial p_0})^2] \quad (4.50)$$

$\therefore$ 면적 변화는 δt^2에 비례한다.

임의의 시간간격 T를 N으로 나누어 $\delta t = \frac{T}{N}$으로 잡으면 면적변화는 δt 시간 동안에 $(\frac{T}{N})^2$에 비례하고 T 시간 동안에는 $N(\frac{T}{N})^2 = \frac{T^2}{N}$에 비례하고 $N \to \infty$, $\delta \to 0$으로 보내면 변화량 $\to 0$.

면적보존성 $\leftrightarrow$ Hamiltonian 계

$\therefore$ Any flow satisfying Hamilton's equations is are-preserving.