

Chapter 3

Second-Order Autonomous Systems

Newton 역학계는 대부분 1차보다는 고차 다변수 함수

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t) \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(x, t) \quad (3.2)$$

$$x = x_1 \quad (3.3)$$

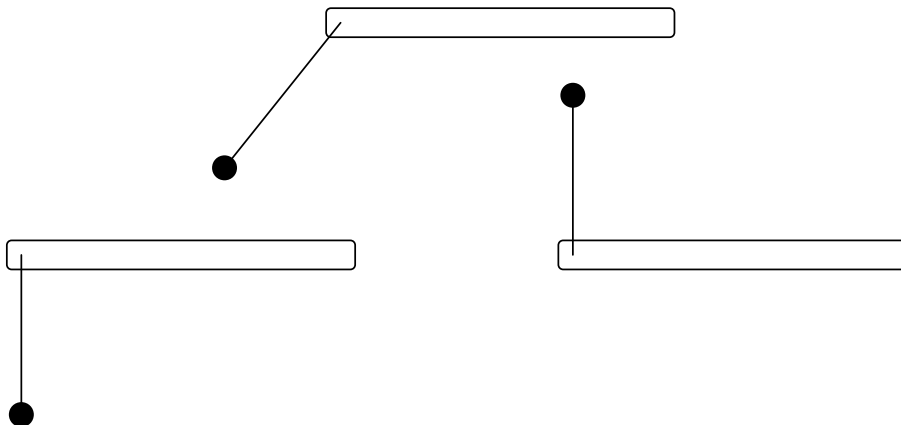
$$\frac{dx_2}{dt} = a(x_1), \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (3.4)$$

$$\vec{r} = (x_1, x_2), \quad \vec{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \quad (3.5)$$

$$\dot{\vec{r}} = v(\vec{r}) \quad (3.6)$$

$v(\vec{r}_k) = 0$ 이 되는 \vec{r}_k 는 부동점

예) 질량없는 막대에 달린 흔들이



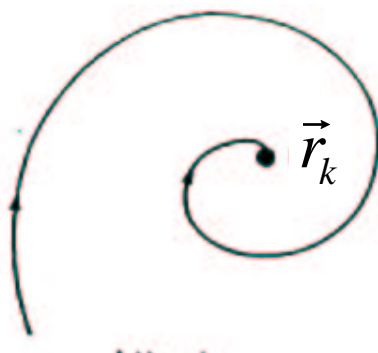
Strongly stable: T : a given map, \hat{x} : a fixed point.

\exists some neighborhood U such that $T(U) \subset U$ and $\bigcap_{n \geq 0} T^n(U) = \{\hat{x}\}$.

dissipation이 있는 경우

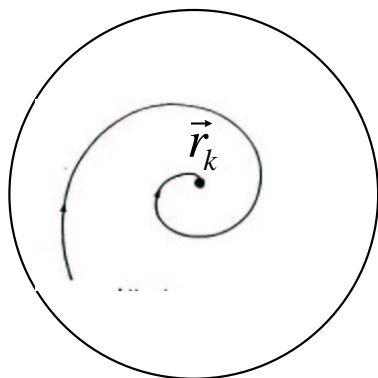
$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_k$ 가 될 때 부동점 \vec{r}_k 는 운동 $\vec{r}(t)$ 의 attractor라 한다.

부동점 \vec{r}_k 는 세계(strongly) or 점근적으로 안정.



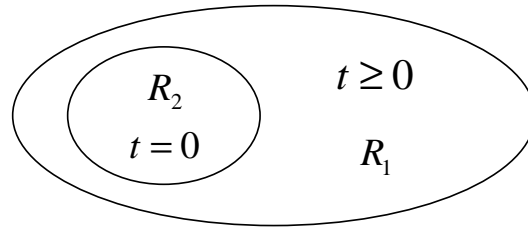
\vec{r}_k 의 근방의 모든 운동은 r_k 로 끝린다.

좀더 구체적으로 근방을 \vec{r}_k 를 중심으로 한 원으로 잡자.



운동을 “포함한다”: $t = 0$ 일 때 구역 R_2 에서 시작한 모든 운동이 $t \geq 0$ 인 모든 t 에서 구역 R_1 에 남아 있으면 R_1 은 다른 R_2 에서 시작한 모든 운동을 포함한다.

Stable: For every neighborhood U , \exists a subneighborhood V such that $T^n(V) \subset U, \forall n \in \mathbb{Z}^+$



$$\vec{r}(0) \in R_2 \rightarrow \vec{r}(t) \in R_1 \quad (t \geq 0) \tag{3.7}$$

안정성은 \vec{r}_k 의 모든 근방이 어떤 다른 근방의 운동을 포함할 때

3.1 안정성의 유형

선형안정성을 살펴보기로 하자.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(r), \quad v(r_k) = 0 \tag{3.8}$$

부동점 근방에서 Taylor 전개

$$v(r) = v(r_k) + \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{r_k} (x - x_1) + \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big|_{r_k} (x - x_2) + \dots \tag{3.9}$$

$$\tilde{r} = r - r_k \tag{3.10}$$

선형 2차 자율계

변수가 분리되는 경우에 \rightarrow diagonalize

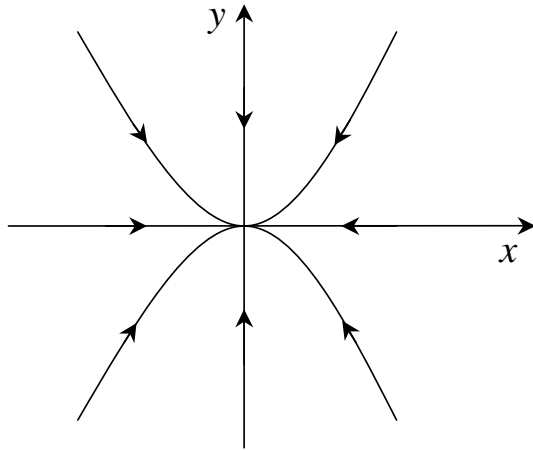
$$\dot{x}_1 = v(x_1) = a_1 x_1 \tag{3.11}$$

$$\dot{x}_2 = v(x_2) = a_2 x_2 \tag{3.12}$$

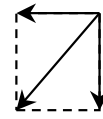
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$x_1 = x_0 e^{a_1 t}, \quad x_2 = y_0 e^{a_2 t} \quad (3.14)$$

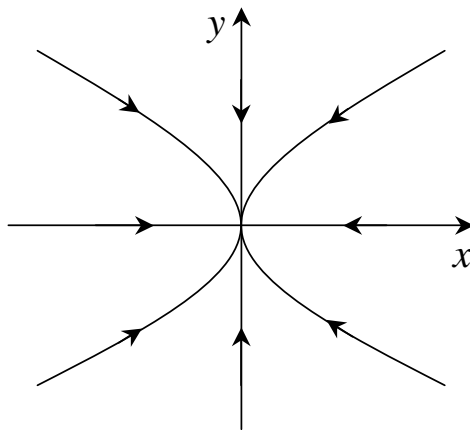
i) $a_1, a_2 < 0$



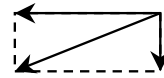
$$a_2 < a_1 < 0$$



stable node



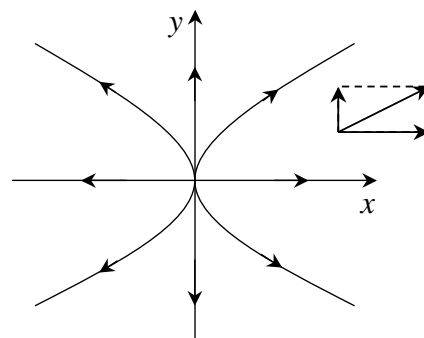
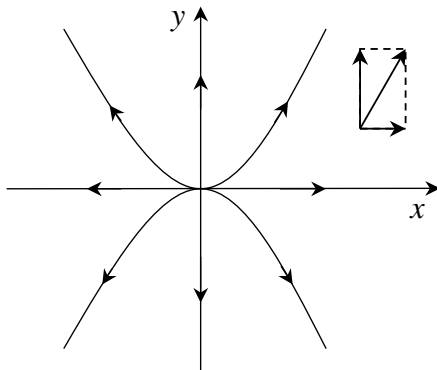
$$a_1 < a_2 < 0$$



ii)

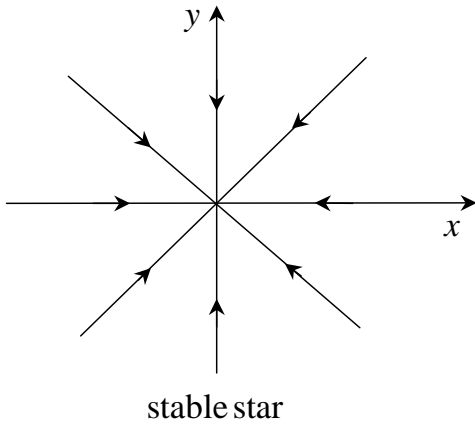
$$a_2 > a_1 > 0,$$

$$a_1 > a_2 > 0$$

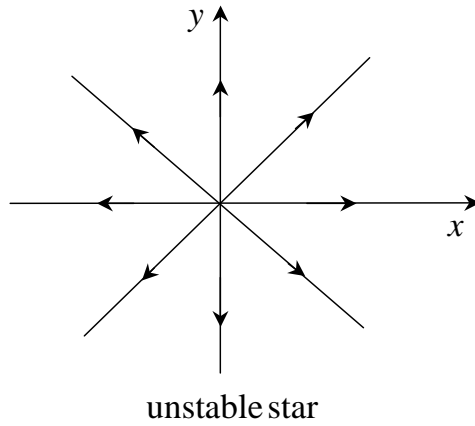


unstable node

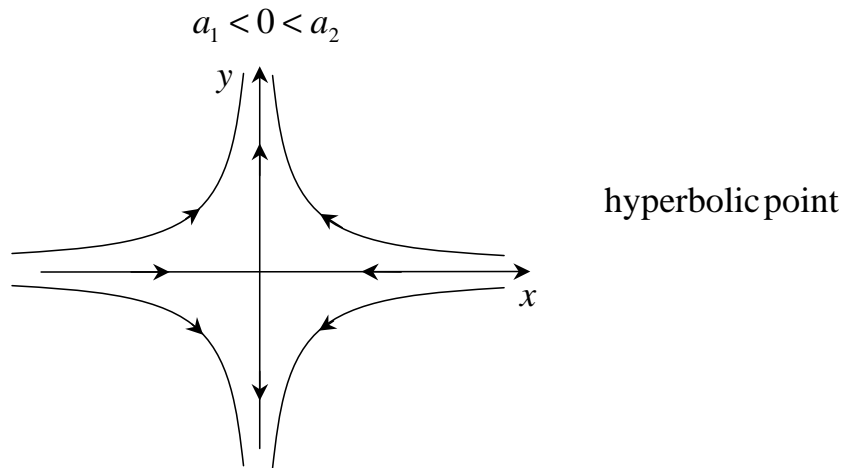
iii) $a_1 = a_2 < 0$



iv) $a_1 = a_2 > 0$



v) $a_1/a_2 < 0$



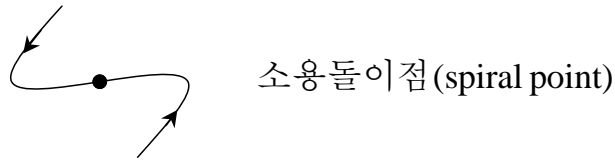
변수분리가 극좌표계로 이루어질 때, 즉 $x_1 = r, x_2 = \theta$ 인 경우 r 성분계는 $r = 0$ 에서 자연경계를 이루고 따라서 부동점이 된다. θ 성분계의 위상 공간은 원이 된다.

• 변수분리: 선형계의 운동방정식

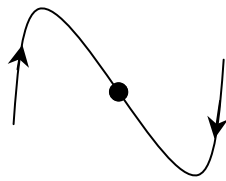
$$\dot{r} = \alpha r \rightarrow r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \dot{\theta} = \omega \tag{3.15}$$

$r = 0$: 부동점

$$\alpha < 0, \omega > 0$$



$$\alpha < 0, \omega < 0$$



소용돌이 점은 세계 안정이고 인력자이다

$$\alpha > 0, \omega > (<)0$$

화살표를 바꿔주면 phase flow가 된다



$\omega = 0$ 이면, $\alpha < 0, \alpha > 0$ 에 따라 안정 또는 불안정 별점이 된다.

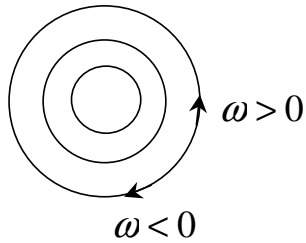
이러한 위상흐름의 해석적 표현

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \omega t + \theta_0, \quad (3.16)$$

$$r = r_0 e^{\alpha(\theta - \theta_0)/\omega} \quad (3.17)$$

$\alpha = 0$ 인 경우 $r = \text{const.}$ 불변집합

$r = 0$: 타원점



$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}$ 을 Cartesian 좌표계로 표현

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

3.2 선형 안정성 분석

$$\vec{v}(\vec{r}) = A\vec{r} + O(|\vec{r}|^2) : \text{부동점 근방에서의 선형 근사} \quad (3.19)$$

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r} \quad (3.20)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{2-dim} \quad (3.21)$$

A 의 고유치와 부동점의 안정성을 보자

$$B = MAM^{-1} : \text{표준형으로 고침} \quad (3.22)$$

$$\vec{R} = M\vec{r} : \text{새로운 좌표} \quad (3.23)$$

$$\dot{\vec{R}} = B\vec{R} \quad (3.24)$$

- 제1종: 고유치 λ_1, λ_2 가 실수이고 서로 다를 때

$$\dot{X} = \lambda_1 X, \quad \dot{Y} = \lambda_2 Y \quad (3.25)$$

면적이 보존되는 경우 쌍곡선점

면적이 보존되지 않는 경우: 안정 불안정 매듭

- 제2종: 고유치가 복소수이면서 서로 공액일 때

2-dim.에선 면적이 보존되든 안되든 하나가 복소수이면
다른 하나는 공액복소수

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \lambda_2 = \alpha - i\omega \quad (3.26)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = \alpha r^2 \rightarrow \frac{dr}{dt} = \alpha r \quad (3.28)$$

$$x = r \cos \theta, \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (3.29)$$

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}, \alpha = 0 : \text{타원점} \quad (3.30)$$

면적이 보존안되는 경우: $\lambda_1 = \alpha + i\omega, \lambda_2 = \lambda_1^*$

$\alpha < 0$: 안정 소용돌이 점

$\alpha > 0$: 불안정 소용돌이 점

- 제3종: 고유치가 실수이면서 서로 같을 때

$$b = c = 0, \quad a = d \rightarrow \dot{x} = \lambda x, \dot{y} = \lambda y \quad (3.31)$$

별점이 된다. $\lambda > (<) 0$ 안정, 불안정

$c \neq 0$ 이면,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ c & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\dot{X} = \lambda X, \quad \dot{Y} = cX + \lambda Y \quad (3.33)$$

$$X = X_0 e^{\lambda t}, \quad Y = (Y_0 + cX_0 t) e^{\lambda t} \quad (3.34)$$

$|t|$ 가 아주 크면 Y_0 무시

$$Y/X = ct = \frac{c}{\lambda} \ln \frac{X}{X_0}, \quad \ln \frac{X}{X_0} = \lambda t \quad (3.35)$$

$\lambda < 0 \rightarrow t < 0$ 일 때 그리고 $|t| \gg 1$

$$\lambda^{-1} \ln \frac{X}{X_0} = t \quad (3.36)$$

$$\text{sign}(Y/X) = -\text{sign}c \quad (3.37)$$

$t > 0$ and $|t| \gg 1$

$$\text{sign}(Y/X) = C \quad (3.38)$$

$$X = X_0 e^{\lambda t} \quad (3.39)$$

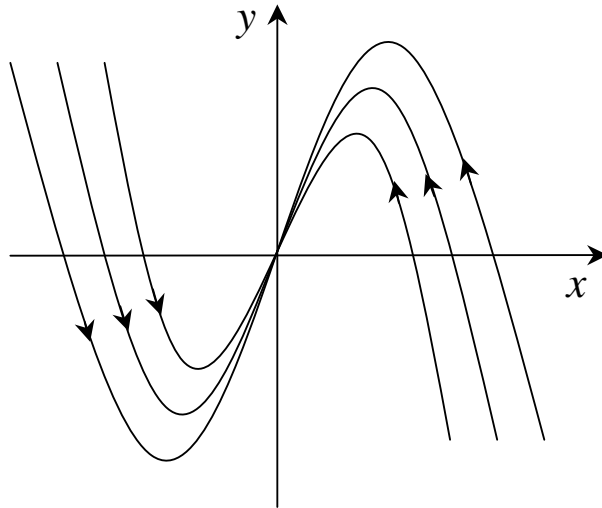
$$\lambda < 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (Y/X) \rightarrow \infty \quad (3.40)$$

$$\text{sign}X = \text{불변} \quad (3.41)$$

(1) $\therefore Y$ 가 sign을 바꾼다

(2) $t \rightarrow \infty \rightarrow Y \rightarrow 0, Y/X \rightarrow \infty$

$(0, 0)$: 입력자, 원점에서 Y 축과 접한다.



안정한 improper node, attractor

$\lambda > 0 \rightarrow$ 불안정한 improper node, repeller

A의 고유치

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \quad \text{안정매듭} \quad (3.42)$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0 \quad \text{불안정매듭} \quad (3.43)$$

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{쌍곡선(불안정)} \quad (3.44)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0 \quad \text{안정별점} \quad (3.45)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0 \quad \text{불안정별점} \quad (3.46)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\omega [\alpha < 0, \omega > (<)0] \quad \text{안정소용돌이} \quad (3.47)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\omega (\alpha > 0) \quad \text{불안정소용돌이} \quad (3.48)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = i\omega \quad \text{타원점} \quad (3.49)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0 (b \neq 0 \text{ or } c \neq 0) \quad \text{안정한 improper node} \quad (3.50)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 > 0 (b \neq 0 \text{ or } c \neq 0) \quad \text{불안정한 improper node} \quad (3.51)$$

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0 (b = c = 0, \lambda > 0) \quad \text{불안정한 별점} \quad (3.52)$$

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0 (b = c = 0, \lambda < 0) \quad \text{안정한 별점} \quad (3.53)$$

3.3 Summary

동역학계: 어떤 공간의 모든 점들이 시간에 따라 어떻게 변화하는가를 기술하는 체계 그 공간을 위상공간

그 점이 움직이는 궤도: 위상 흐름

$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$ 로 주어진 운동방정식: (자율계)

$\vec{v}(\vec{x})$: 속도장

속도장을 주면 이 동역학계의 대강의 특징을 살펴볼 수 있다.

부동점, 불변집합

부동점: $\vec{v}(\vec{x}_k) = 0$

부동점 근방의 위상 흐름이 부동점의 성격을 준다.

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_k, \quad \dot{\vec{s}} = A\vec{s}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}_k} \quad (3.54)$$

A 의 성질이 \vec{x}_k 근방의 위상 흐름을 준다.

• Limit Cycle

극좌표계에서 변수분리되고 $r = 0$ 이외에 불변집합이 있을 때

$$\dot{r} = \alpha(r - R)R, \quad R > 0 \quad (3.55)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3.56)$$

$$r = R \text{ 불변집합} \quad (3.57)$$

$\alpha < 0$

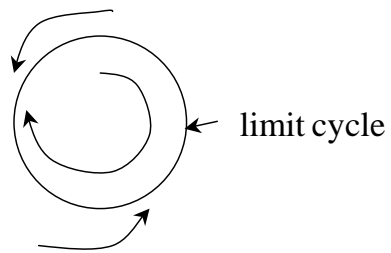
$$\dot{s} = \lambda s, \quad s = r - R, \quad \lambda = \alpha R \quad (3.58)$$

$$r - R = (r_0 - R)e^{\lambda t} \quad (3.59)$$

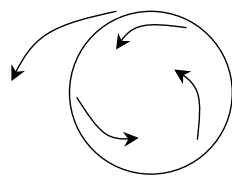
$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (3.60)$$

$$r = R + (r_0 - R)e^{\lambda(\theta - \theta_0)/\omega} \quad (3.61)$$

$\lambda < 0$



$\lambda > 0$



$\lambda = 0$

