# Chapter 1

# First-Order Autonomous Systems

## 1.1 Dynamical Systems

어떤 공간의 모든 점들이 시간에 따라서 어떻게 변화하는가를 기술하는 체계

e.g. 생물체의 증식 현상 (population dynamics)

인구증가율 = 출생율 - 사망율

출생율: 1000명당 매해 출생하는 수

$y$: population

$$\frac{\Delta y}{y\Delta t} \quad t, y : \text{integer} \tag{1.1}$$

$t$, $y$를 실수에 확장

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{y\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)} : \text{population growth} \tag{1.2}$$

### 1.1.1 가장 간단한 모형: 일정비율의 증가율

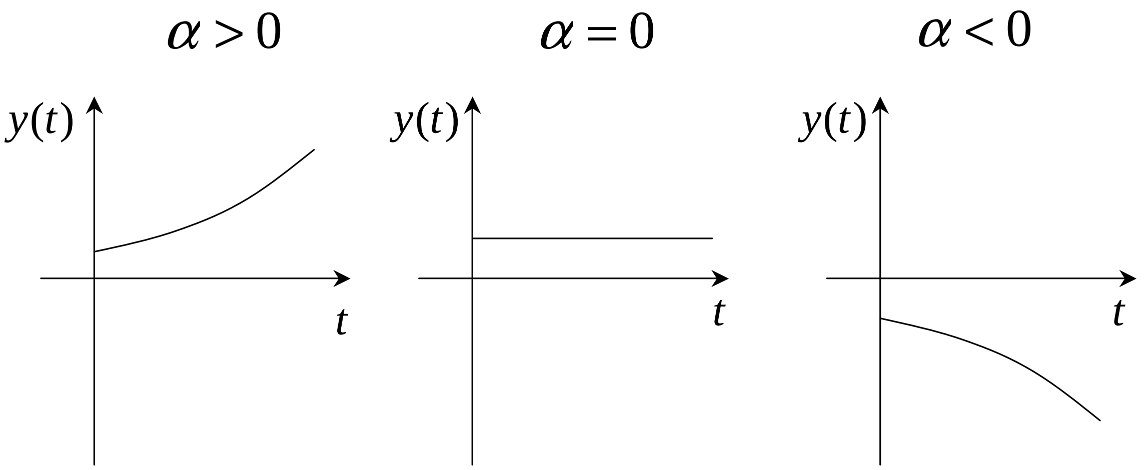
$$\Delta y = \alpha y \Delta t \tag{1.3}$$

$$y'/y = \alpha(\text{const.}) \tag{1.4}$$

$$\downarrow$$

$$y = y(0)e^{\alpha t} \tag{1.5}$$

Phase Flow




"무한증가"는 비현실적

$\sigma$: 한 사람 당 양식 공급량 (환경에 의해서 결정되는 상수)

$\sigma_0$: 한 사람 당 최소 양식 (종에 의해서 정해지는 상수)

$$\sigma > \sigma_0 : \text{인구증가}$$

$$\sigma < \sigma_0 : \text{인구감소}$$

$$\sigma = \sigma_0 : \text{인구불변}$$

$$y'/y = a(\sigma - \sigma_0) \tag{1.6}$$

$$y = y(0)e^{a(\sigma-\sigma_0)t} \tag{1.7}$$

### 1.1.2 Logistic Equation

Social friction: 질병

$y$가 $\eta$를 넘어서면 감소, $y$가 아주 작으면 "무한증가" 모형

$$\frac{y'}{y} = c(\eta - y), \quad c > 0 \tag{1.8}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= c\,\eta y - cy^2 \quad (-cy^2\text{: Social friction}) && (1.9) \\
y' &= M(y)y && (1.10)
\end{aligned}
$$

$$
M(y) : \begin{cases} M(y) = 0 \\ M(y) > 0, \quad y \simeq 0 \\ M(y) < 0, \quad y > \eta \end{cases} \tag{1.11}
$$

## 1.2 1st Order Autonomous Systems

$$
\frac{dy}{dt} = v(y,t) \tag{1.12}
$$

$$
v(y,t) = v(y) \quad \text{속도장 (velocity field)}
$$

$$
t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{v(y)} \tag{1.13}
$$

$$
y(t) = y(t - t_0) \tag{1.14}
$$

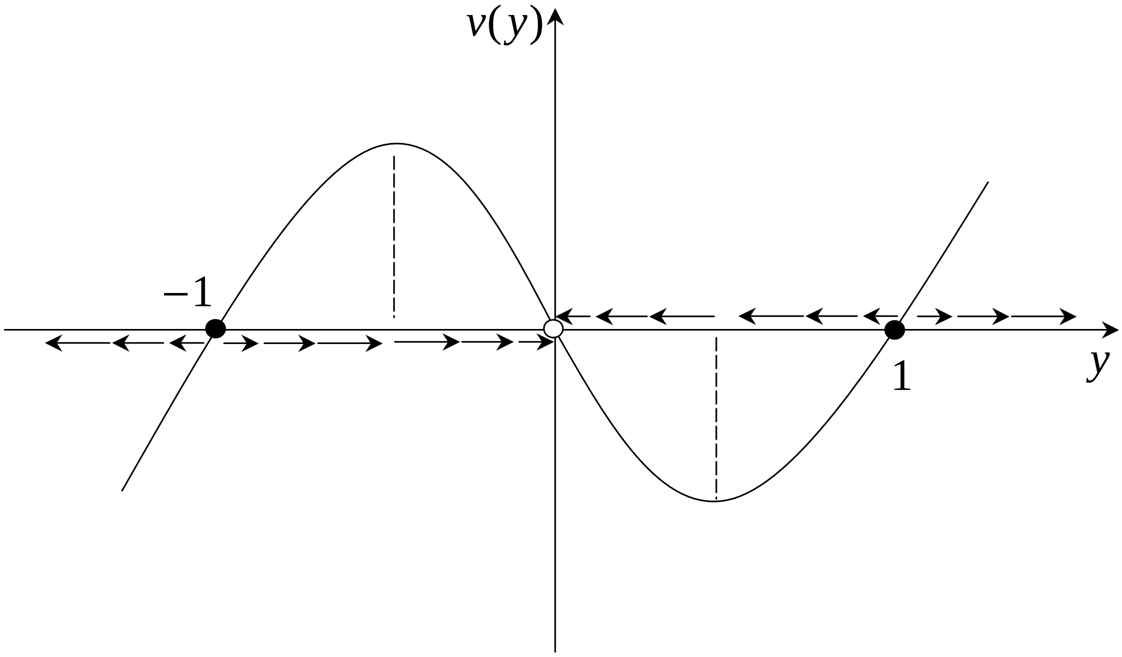
$t$의 의존성: $(t - t_0)$ 꼴로 들어간다.

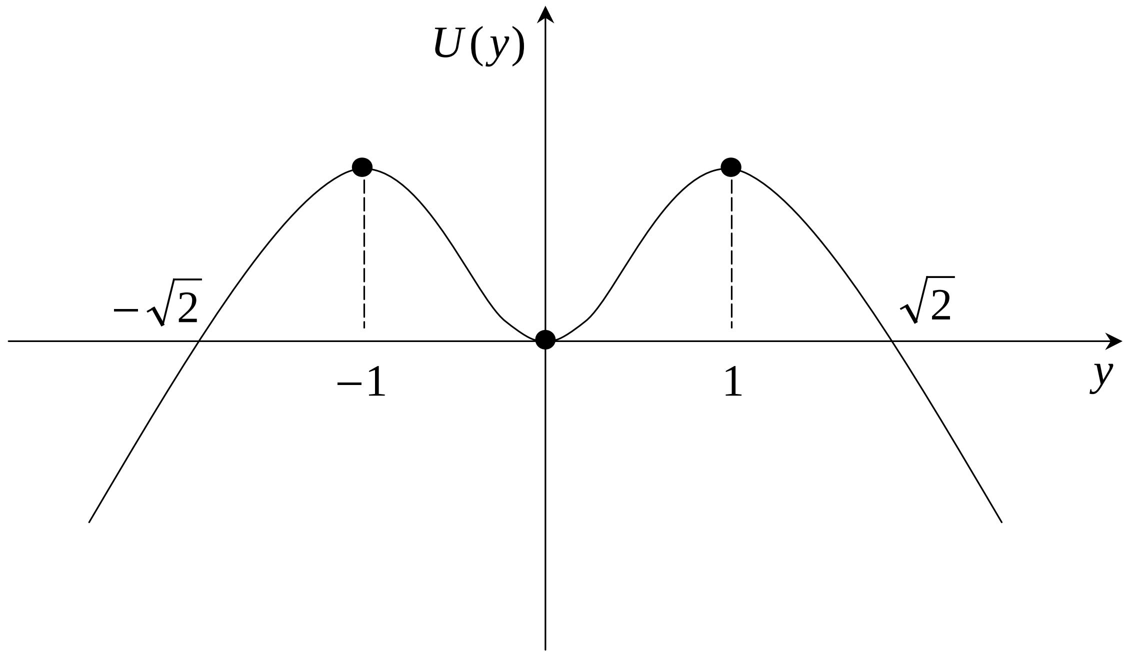
Potential 함수, potential 장

$$
v(y) = -\frac{dU(y)}{dy} \tag{1.15}
$$

$$
v(y) = -y + y^3 \tag{1.16}
$$

$$
U(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \tag{1.17}
$$



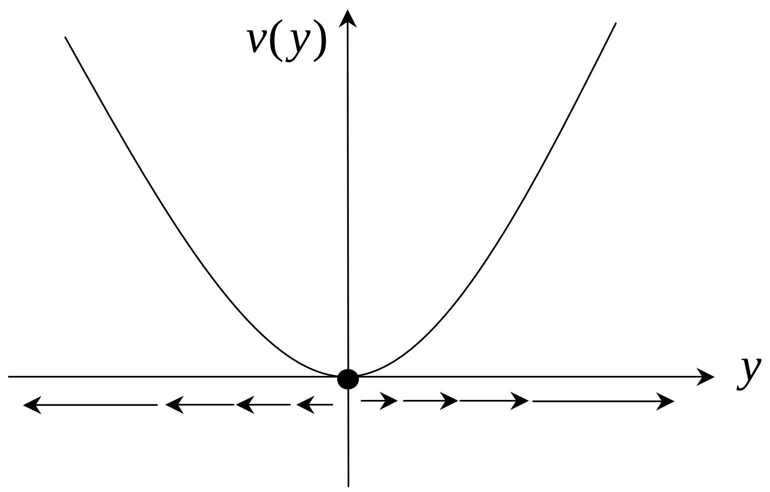

$v(y_k)=0$이 되는 점: $y_k = 0, \pm 1,$: fixed point

두 부동점 사이의 open interval에 있는 phase points의 운동은 그 구간을 벗어 나지 못한다. 이런 open interval을 invariant set

$$(-\infty, 1), -1, (-1, 0), 0, (0, 1), 1, (1, \infty) \tag{1.18}$$

- 구조적 안정성: $\dot{y} = v(y)$, $v(y) = c\,y^2$

$y = 0$: 부동점




$v(y) = 0$인 $y = 0$에서 중근을 갖기 때문에 안정도 불안정도 아니다.

$w(y)$: bounded and differentiable function

$v(y)$에 $\varepsilon w(y)$ 이라는 작은 섭동을 가했을 때 불변집합의 위상이 불면이면 구조적 안정이라 한다.

$$v(y) = c\,y^2, \quad \tilde{v}(y) = c\,y^2 + \varepsilon \tag{1.19}$$

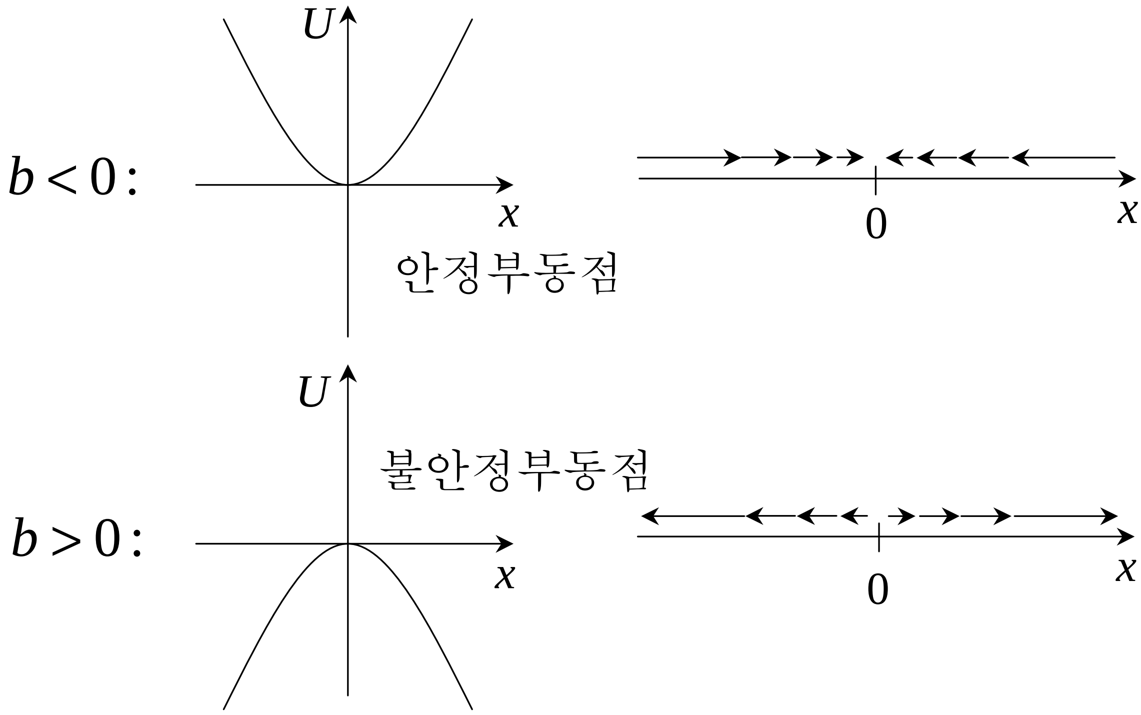
$\therefore$ 구조적 불안정

$\varepsilon > 0$: $y = 0$ 근방에서 부동점 (X)

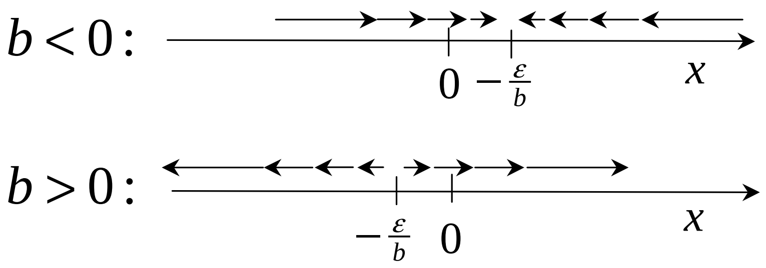
$\varepsilon < 0$: $y = 0$ 근방에서 2개가 나타남.

- Structurally Stable System

$$
\begin{aligned}
v(x) &= bx \quad (b \neq 0) \qquad (1.20)\\
&\downarrow \\
U(x) &= -\frac{b}{2}x^2 \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
v(x) = bx + \varepsilon \ \ (\varepsilon > 0) \rightarrow U(x) &= -\frac{b}{2}x^2 - \varepsilon x \\
&= -\frac{b}{2}(x + \frac{\varepsilon}{b})^2 + \frac{\varepsilon^2}{2b} \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$




$\therefore$ Structurally Stable

## 1.3 Two Variables 1st Order Autonomous Systems

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = a_2 x_2 \tag{1.23}$$

선형, 변수분리

$$x_1 = \kappa_1 e^{a_1 t}, \quad x_2 = \kappa_2 e^{a_2 t} \tag{1.24}$$

$\kappa_1$과 $\kappa_2$는 $x_1(t_0) = u_1$과 $x_2(t_0) = u_2$로 결정됨

$$\vec{x} = (x_1, x_2), \quad \dot{\vec{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \tag{1.25}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{1.26}$$

$$\vec{x} \to A\vec{x}\text{를 본뜨기} \quad A : R^2 \to R^2 \tag{1.27}$$

일반적으로 1 성분과 2 성분이 결합된 경우 $A$는 행렬.

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{1.28}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Local properties는 선형 map으로 살펴봄.