1차원 본뜨기에서 주기배가 혼돈전이

용세중

맺음변수 A를 변화시키면서 1차원 본뜨기와 관련된 쌍갈림에 대해서 공부하고자 한다. A를 증가시켜 가면 고정점은 안정성을 잃고 주기배가를 하게 된다. 이러한 무한 연속 주기배가를 통해서 혼돈전이가 발생하게 되는데 혼돈전이 점에서의 축적 거동에 대해서 논의한다.

Ⅰ. 서론

디지털 전자공학이나 생물학에서의 개체수의 변동등은 시간에 연속적이기보다는 불연속적으로 변화한다. 이처럼 시간에 불연속적으로 변화하는 계, 즉 1차원 본뜨기에 대해서 공부하고자 한다.

1차원이라는 말은 계를 기술하는 변수가 1개라는 뜻이다. 공부한 1차원 본뜨기는

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - A\,x_n^2 \qquad (1)$$

로써 x는 상태변수, A는 맺음변수를 뜻한다. 맺음변수가 $0 \le A \le 2$인 경우에 상태변수 x는 $-1 \le x \le 1$에만 있게 된다. 식 (1)의 의미는 n+1의 상태가 n의 상태에 의존적임을 나타낸다.

본뜨기에서 임의의 초기값 x_0를 주고 본뜨기를 반복해서 얻은 결과 값 x_1, x_2, x_3, …등을 궤도(orbit)[1]라고 하며 고정점(x^*, fixed point)[2]은 여러번 반복한 후에도 자기자신으로 돌아오는 궤도를 가르킨다.

1차원 본뜨기에서 맺음변수 A가 어떤 임계값을 통과할 때 나타나는 주기배가 혼돈전이[3,4]를 고찰한다.

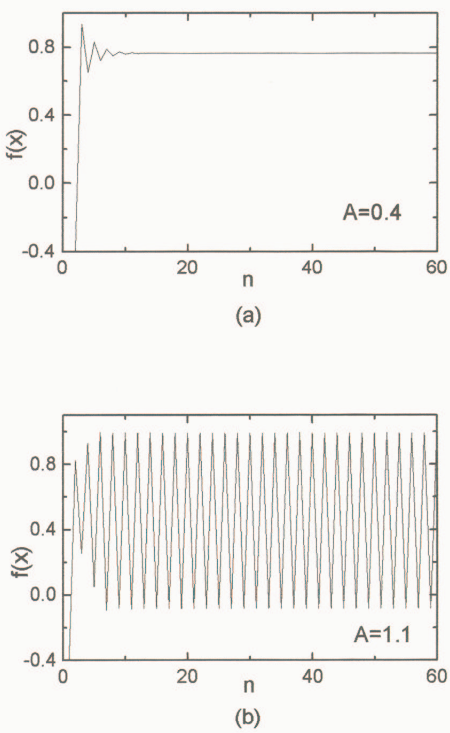


그림 1. 시간의 흐름에 따른 상태변수의 변화

Ⅱ. 1차원 본뜨기에서의 주기궤도의 안정성, 주기배가 그리고 리아프노프 지수

이 절에서는 맺음변수의 변화가 계의 상태에 어떠한 영향을 미치는가를 개략적으로 살펴보고 고정점(fixed point)을 찾는 방법 그리고 1차원 본뜨기에서의 안정성을 논하고 안정성과 연관된 주기배가와 리아프노프 지

수(Lyapunov exponent)[5]를 논한다. 그림 1은 1차원 본뜨기의 시계열(time series) 그림이다. 그림 1의 (a)는 A=0.4인 경우로 초기의 과도상태 이후 평형 상태를 유지한다. 그러나, 그림 1의 (b)에서는 맺음변수가 A=1.1이 되었을 때 그 균형은 둘로 나누어지고 즉, 주기 2가 되고 두 개의 다른 값 사이에서 진동하게 된다. 이처럼 본뜨기의 고정점의 갯수가 2배로 증가하는 것, 이러한 것을 주기배가(period-doubling)[2]라고 한다.

주기가 k인 궤도, $f^k(x^*)=x^*$이고 $1 \le i \le k-1$에서 $f^i(x^*) \neq x^*$의 특성을 갖는 궤도의 선형 안정성을 분석해 보자[6]. 여기서, f^k는 k번 반복된 본뜨기를 뜻한다. 고정점 x^*의 안정성은 x^*의 근접 궤도 $x_n(=x^*+D_n)$를 가정하고 n를 증가시킴에 따라서 편차 D_n의 증가와 감소로써 판별한다.

이를 선형화하면 아래의 관계식을 얻을 수 있다.

$$D_{n+1} \approx f'(x^*)\ D_n \tag{2}$$

이를 정리하면,

$$\lambda \equiv f'(x^*) \tag{3}$$

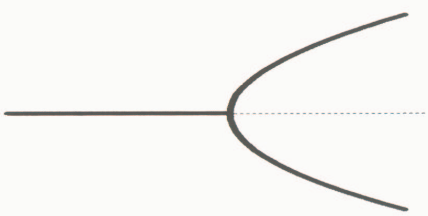
을 구할 수 있으며,

$$x^* = f^k(x^*) = \underbrace{f(f(\ldots f(x^*)\ \ldots))}_{\text{k번}} \tag{4}$$

과 연쇄법칙(chain rule)에 따라

$$\lambda = \prod_{i=0}^{\infty} |f'(x_n)| \tag{5}$$

이다. 이것을 안정성 승수(stability multiplier)[2]라 부르며, 안정성 승수를 사용하여 주기 궤도의 안정성을 분석한다. 이것은 고정점(x^*)이 끌개(attractor)인지 밀개(repeller)[6]인지를 결정하기 위해서 사용하는데 주기 궤도는 $|\lambda| \le 1$이면 안정하고 $|\lambda| > 1$ 이면 불안정하다. 즉, 안정성 승수가 1이거나 -1이 되면 주기 궤도는 불안정해지면서 주기배가를 하게된다.



그 림 2. 주기 배가 쌍갈림

그림 2는 주기배가 쌍갈림(period-doubling bifurcation)[3]을 나타낸 것이다. 궤도가 불안정해지면서 주기배가된 안정한 궤도 두 개가 나타나는 것을 보여주고 있다. 실선은 안정한 궤도를 나태내고 점선은 불안정한 궤도를 나타낸다.

1차원 본뜨기에서 궤도에 대한 리아프노프 지수는 근접 궤도들의 평균적인 발산율을 나태낸다. 초기 궤도점 x^*과 가까운 궤도 $x^*+\delta_0$를 가정하고 n번 반복하면 $|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{n\sigma}$을 얻을 수 있다. 이로부터 리아프노프 지수를 얻을 수 있는데 다음과 같다.

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\delta_n}{\delta_0} \tag{6}$$

σ가 양수이면 혼돈 궤도(chaotic orbit), 음수이면 규칙적 궤도(regular orbit) 그리고 0이면 쌍갈림이 나타난다. 리아프노프 지수는 궤도의 수렴성을 조사함으로써 계의 혼돈성(chaoticity)을 정량적으로 측정할 수 있도록 해 준다.

Ⅲ. 주기배가 혼돈전이

이 절에서는 1차원 본뜨기에서 맺음변수 A를 변화시키면서 평형점의 안정성과 관련된 주기배가에 대해서 분석해 보고자 한다.

A를 증가시키면 주기배가가 발생한다. 그림 3의 (a)는 포물선이

$$x^* = \frac{-1+\sqrt{1+4A}}{2A} \tag{7}$$

에서 대각선과 교차한다. 이 교차점이 고정점이며 모든 궤도를 끌어들이는 주기 1의 끌개인 것이다. 그림 3의 (b) 왼쪽 그림은 $n \to \infty$일 때 주기 1의 고정점으로 수렴하며 오른쪽 그림은 $A=0.75$일 때 $|\lambda|=1$이 된다는 것을 나타낸다. 그림 3의 (c)는 쌍갈림을 통해 2개의 끌개와 1개의 밀개가 나타나는 것을 볼 수 있다.

이 밀개는 주기배가를 하면서 안정성을 잃게 된 주기 1의 고정점이다. 새로운 2개의 교차점은 $f^2(x)=x$를 $f(x)=x$로 나누고 인수분해하여 구하면

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4A-3}}{2A} \tag{8}$$

이다. 그러나 $A=0.75$일때 서로 다른 두 교차점은 일치하고 $x^*=\frac{2}{3}$이다. 이 x^*에서 두 갈래로 나누어진

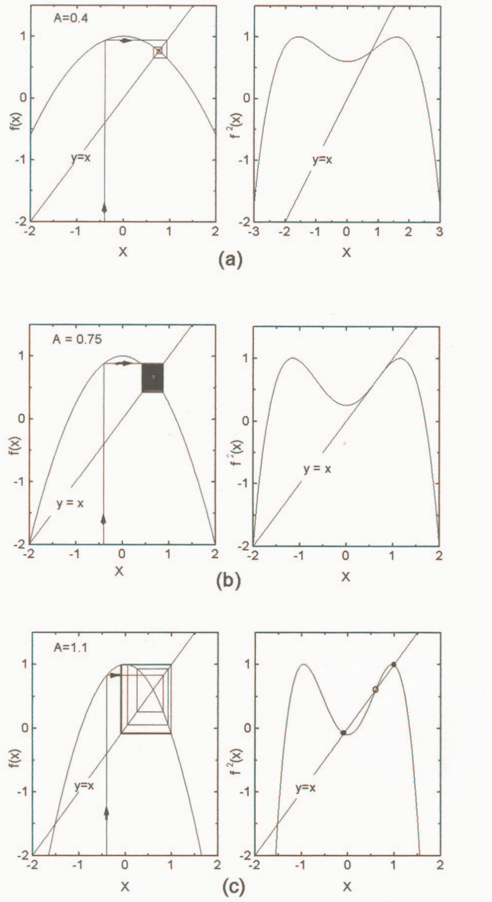


그림 3. A=0.4, 0.75 그리고 1.1일 때 1차원 본뜨기의 반복(iteration)과 $f^2(x)$

다는 것을 그림 3의 (b)와 (c)를 통해 알 수 있다. 그러고, $A < 0.75$의 경우에 이 두 근은 허수로써 존재하지 않는다.

그림 4는 $x-A$평면에서 주기배가로 생기는 쌍갈림 도표를 나타낸다. 맺음변수의 변화는 왼쪽에서 오른쪽으로 증가하는 수평축으로 나태내고, 상태변수는 수직축으로 나타냈다. 맺음변수가 증가됨에 따라서 주기 1에서 주기 2, 주기 2에서 주기 4로 이러한 주기가 4, 8, ... 이처럼 A를 증가시켜가면 무한 연속 주기배가를 하

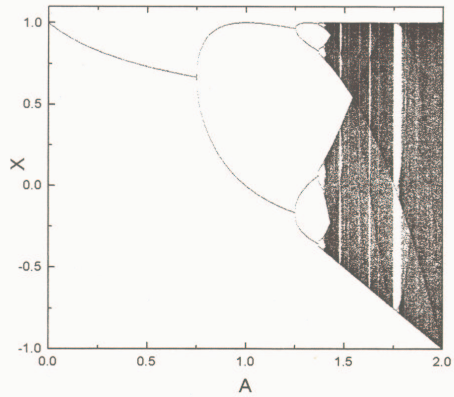


그림 4. 1차원 본뜨기에서의 쌍갈림 도표

고 임계점 A_∞(=1.401155189)를 통과하면 안정되지 않는 연속적인 변화의 상태, 혼돈전이가 나타난다. 그림 5에서 임계점을 지나게 되면 리아프노프 지수 σ가 양수가 되는 것을 볼 수 있다.

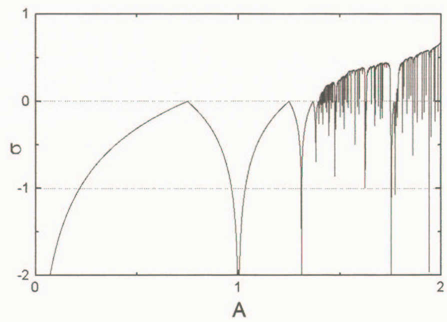


그림 5. 1차원 본뜨기에서의 리아프노프 지수

Ⅳ. 주기배가 쌍갈림의 임계거동

이 절에서는 주기배가 쌍갈림의 임계거동을 분석하고 맺음변수에 대한 축적거동(parameter scaling)과 주기배가 쌍갈림을 통해 나타나는 주기적인 궤도들의 궤도 축적거동(orbit scaling)에 대해서 탐구하고자 한다[1-3].

A를 증가시켜 가면 임계점 A_∞까지 연속 주기배가

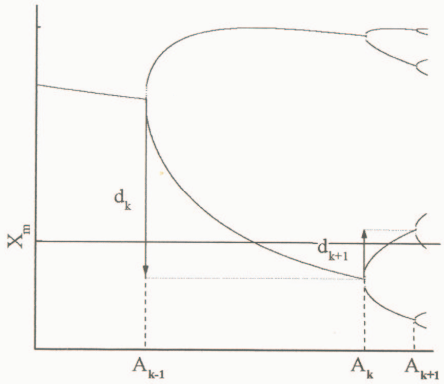


그림 6. X_m 근체에서의 쌍갈림 도표

를 하게 된다. 이 과정에서 주기배가를 하게 되는 A 값, A_k가 표 1에 주어졌다. 다시 말해, 주기 2^k인 궤도는 A_k에서 안정성 승수가 -1이 되어 주기배가 쌍갈림을 통해 불안정해진다. 주기배가는 임의적인 것이 아니라 일정한 비율로 빨라지는데 A_k에 대해 축적거동 비

$$\delta_k = \frac{A_k - A_{k-1}}{A_{k+1} - A_k} \qquad (9)$$

를 구해보면 A가 A_∞으로 접근할수록 δ_k는 4.6692로 수렴함을 알 수 있다(표 1을 보시오).

표1. 맺음변수의 급수적 수렴

k	A_k	δ_k
1	0.75	
2	1.25	4.2337382
3	1.3680989393	4.5515069
4	1.3940461566	4.6458075
5	1.3996312388	4.6639381
6	1.4008287423	4.6681039
7	1.4010852712	4.6689627
8	1.4011402146	4.6691509
9	1.4011519820	4.6691906
10	1.4011545022	4.6691992

본뜨기 f에서 주기 2^k인 궤도가 불안정하질 때, 최대점 x_m ($x = 0.0$)에 가장 근접한 궤도 x_k를 관찰해보면 x_m을 기준으로 작아지는데 x_k의 축적거동비

$$\alpha_k = \frac{d_k}{d_{k+1}} \qquad (10)$$

를 구해보면 임계점(A_∞)에 접근 할수록 $\alpha = -2.5029$로 최대점 x_m으로 수렴해 간다(표 2를 보시오). 여기서, d_k는 x_m에 가장 근접한 궤도점들 중에서 주기 2^{k-1}의 궤도에서 2^k의 궤도 사이의 거리다.

표2. 상태변수의 급수적 수렴

k	x_k	α_k
1	0.6666666666	
2	-0.1656854249	-3.6698494
3	0.0611228119	-2.6640104
4	-0.0240150813	-2.5356644
5	0.0095610861	-2.5097701
6	-0.0038170981	-2.5043789
7	0.0015248188	-2.5032217
8	-0.0006091978	-2.5029751
9	0.0002433942	-2.5029222
10	-0.0000972444	-2.5029109

V. 요약

1차원 본뜨기에서 맺음변수를 변화시키면서 주기 궤도의 안정성과 관련된 쌍갈림에 대해서 탐구하였다. 맺음변수 A를 증가시켜 가면 주기배가를 통한 혼돈 전이가 발생하고 혼돈전이 점에서의 맺음변수의 축적 거동 비는 4.6692이고 궤도 축적 거동 비는 -2.5029이다.

VI. 참고 문헌

[1]. Steven H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*(Addison-wesley, 1996), Sec 4.3, Ch 10.

[2]. H.J. Korsch and H.-J. Jodl, *CHAOS*(Springer-Verlag, New York, 1994), p.31-36, 187-196.

[3]. M.J. Feigenbaum, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Science **1** (1980).

[4]. R. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261**, 459-467 (1976).

[5]. Marion Thornton, *Classical dynamics of partilces and systems*, Saunders College Publishing, p.184-185.

[6]. Ian. Percival and Derek. Richards, *Introduction to Dynamics*(Cambridge university, 1982), Sec 11.3.