

결합 비선형 동역학계에서의 혼돈전이

김 상 윤*

강원대학교 물리학과, 춘천 200-701

이 논문은 결합 비선형 동역학계에서 일어나는 혼돈전이에 관한 최근 본인의 일에 대한 해설이다. “축소된” 재규격화 방법을 써서, 결합 1차원 본뜨기에서의 주기 배가, 보다 높은 주기 p ($p = 3, 4, \dots$) 배가, 그리고 간헐성을 통한 혼돈전이와 관련된 보편적인 임계축척거동을 분석했다. 이러한 재규격화 결과는 추상 동역학계인 결합 1차원 본뜨기와 실제 동역학계인 결합 비선형 진동자에서 확인되었다.

지금부터 20년 전에 Feigenbaum이 비선형 동역학과 혼돈 분야에 처음으로 재규격화 방법(renormalization method)을 도입해서, 1차원 본뜨기(map)에서 무한 연속 주기배가 쌍갈림(an infinite sequence of period doubling bifurcations)을 통한 혼돈전이(transition to chaos)와 연관된 보편적 임계축척거동을 발견했다 [1]. 이 재규격화 결과는 실제 동역학계인 강제 비선형 진동자와 여러 가지 다양한 실험에서 확인되어졌다 [2]. 이 주기배가를 통한 보편적 혼돈전이(universal period-doubling route to chaos)의 발견은 비선형 동역학과 혼돈 분야에 획기적인 전기를 마련한 일 중의 하나이다. 이러한 주기배가 혼돈전이에 대한 일이 있고 난 후에, 보다 높은 주기 p ($p=3, 4, \dots$) 배가 [3], 간헐성(intermittency) [4], 그리고 준주기성 (quasiperiodicity)을 [5] 통한 보편적 혼돈전이가 또한 재규격화 방법을 써서 발견되었다. 따라서, 저차원 동역학계인 1차원 본뜨기에서의 보편적인 혼돈전이는 잘 이해가 되어져 있다.

최근에는 이러한 1차원 본뜨기를 구성인자로 하는 결합 1차원 본뜨기가 많은 유효 자유도를 갖는 결합 동역학계(coupled dynamical system)의 추상적인 모형으로 많이 쓰여지고 있다 [6]. 이러한 결합 본뜨기는 여러 가지 분기, 혼돈, 패턴 형성, 시공간 간헐성, 시공간 혼돈 등 매우 다양한 동역학적 거동을 보인다. 본 해설에서는 결합 동역학계에서 일어나는 보편적인 혼돈전이에 대한 최근 본인의 일을 다루고자 한다. 주기배가인 경우에 1차원 본뜨기에서의 임계축척 결과를 결합 1차원 본뜨기 경우로 확장하려는 많은 노력이 있어 왔다 [7-14]. 본인의 경우에는 “축소된” 재규격화 방법을 도입해서, 결합 1차원 본뜨기에서 주기배가와 연관된 임계축척거동을 분석했다 [10-14]. 그 결과 1차원 본뜨기 경우 보다 매우 다양한 임계축척 거동을 발견했다. 추상 동역학계인 결합 1차원 본뜨기에서의 이러한 결과는 실제 동역학계인 결합 비선형 진동자에서도 확인되었다 [15]. 이와 같이 주기 배가 경우에 성공적으로 사용된 축소된 재규격화 방법을 써서, 1차원 본뜨기에서의 보다 높은 주기 p 배가와 [16] 간헐성

을 [17,18] 통한 혼돈전이와 연관된 임계축척거동을 또한 결합 1차원 본뜨기 경우로 확장하였다.

가장 간단한 결합계인 두 개의 1차원 본뜨기가 다음과 같이 대칭적으로 결합된 본뜨기 T 를 생각하자:

$$T : \begin{cases} x_{t+1} = F(x_t, y_t) = f(x_t) + g(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = F(y_t, x_t) = f(y_t) + g(y_t, x_t). \end{cases} \quad (1)$$

여기서 t 는 이산시간을 나타내며, $f(x)$ 는 한 개의 이차 최대 점을 갖는 1차원 본뜨기이고, $g(x, y)$ 는 결합함수이다. 비결합된 1차원 본뜨기 f 는 $f(0)=1$ 인 규격화 조건을 만족하며, 결합함수 g 는 다음과 같은 조건을 만족한다:

$$g(x, x) = 0 \quad \text{for any } x. \quad (2)$$

위와 같은 결합 1차원 본뜨기에서 일어나는 보편적인 주기배가 혼돈전이에 대한 재규격화 분석 결과부터 살펴보자. 자세한 것은 참고문헌 [10]과 [11]을 참조하길 바란다. 주기배가 재규격화 변환 \mathcal{N} 은 다음과 같이 세곱 연산자(squaring operator)와 재축척 연산자(rescaling operator)로 이루어져 있다:

$$\mathcal{N}(T) \equiv BT^{(2)}B^{-1}. \quad (3)$$

여기서 우리는 동기화된 궤도들만 생각하기 때문에, 재축척 연산자는

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (4)$$

이다. 이 재규격화 연산자 \mathcal{N} 을 결합 본뜨기 (1)에 n 번 가하면, 다음과 같이 n 번 재규격화된 본뜨기 T_n 을 얻게 된다:

$$T_n : \begin{cases} x_{t+1} = F_n(x_t, y_t) = f_n(x_t) + g_n(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = F_n(y_t, x_t) = f_n(y_t) + g_n(y_t, x_t). \end{cases} \quad (5)$$

여기서 f_n 과 g_n 은 각각 n 번 재규격화된 함수 F_n 의 비결합된 부분과 결합부분을 나타낸다. 그리고, 그것들은 다음과 같은 되돌이 방정식(recurrence equation)을 만족한다:

*E-mail: sykim@cc.kangwon.ac.kr

$$f_{n+1}(x) = \alpha f_n\left(f_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x, y) &= \alpha F_n\left(F_n\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right), F_n\left(\frac{y}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}\right)\right) \\ &\quad - \alpha f_n\left(f_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right). \end{aligned} \quad (7)$$

이 되돌이 관계식 (6)과 (7)로부터 한 쌍의 함수 (f, g) 를 변환시키는 재규격화 연산자 \mathcal{R} 을 다음과 같이 정의할 수가 있다:

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

비선형과 결합 매개변수를 임계값으로 고정시킨 본뜨기 T_c 를 임계 본뜨기(critical map)라고 부른다:

$$T_c : \begin{cases} x_{t+1} = F_c(x_t, y_t) = f_c(x_t) + g_c(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = F_c(y_t, x_t) = f_c(y_t) + g_c(y_t, x_t). \end{cases} \quad (9)$$

이러한 임계 본뜨기는 재규격화 변환 \mathcal{N} 에 의해서 부동 본뜨기(fixed map) T^* 로 끌려가게 된다:

$$T^* : \begin{cases} x_{t+1} = F^*(x_t, y_t) = f^*(x_t) + g^*(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = F^*(y_t, x_t) = f^*(y_t) + g^*(y_t, x_t). \end{cases} \quad (10)$$

여기서 (f^*, g^*) 는 재규격화 연산자 \mathcal{R} 의 부동점(fixed point)이다:

$$\begin{pmatrix} f^* \\ g^* \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} f^* \\ g^* \end{pmatrix}. \quad (11)$$

이 부동점 방정식은 열(row) 순으로 연속해서 풀 수가 있다. f^* 에 대한 방정식은 다음아닌 1차원 본뜨기 경우의 부동점 방정식이며, 이미 수치적으로 풀려져 있다 [1]. 따라서, 오직 결합 부동 함수인 g^* 에 대한 방정식만 풀면 된다.

그러나 g^* 에 대한 부동점 방정식을 직접 풀기는 쉽지가 않다. 따라서, “축소된” 결합함수인 $G(x)(\equiv \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}|_{y=x})$ 에 대한 다루기 쉬운 되돌이 방정식을 도입한다. 결합함수인 $g(x, y)$ 에 대한 되돌이 방정식 (7)을 y 에 대해서 미분하고 $y = x$ 로 놓으면, $G(x)$ 에 대한 다음과 같은 되돌이 방정식을 얻는다:

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \left[f'_n\left(f_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) - 2G_n\left(f_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right] G_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\ &\quad + G_n\left(f_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) f'_n\left(\frac{x}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

그리면 방정식 (6)과 (7)로부터 한 쌍의 함수인 (f, G) 를 변환시키는 “축소된” 재규격화 연산자 $\tilde{\mathcal{R}}$ 를 정의할 수가 있다:

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ G_{n+1} \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} f_n \\ G_n \end{pmatrix}. \quad (13)$$

이제부터는 다음과 같은 식을 만족하는 $\tilde{\mathcal{R}}$ 의 부동점

표 1. 주기배가 1인 경우에 세 개의 축소된 결합 부동 점과 그것들의 관련 결합 고유치 ν 를 보여주고 있다.

	$G^*(x)$	ν
I	0	$\alpha, 2$
II	$\frac{1}{2}[f^{**}(x) - 1]$	2
III	$\frac{1}{2}f^{**}(x)$	nonexistent

(f^*, G^*) 을 구한다:

$$\begin{pmatrix} f^* \\ G^* \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} f^* \\ G^* \end{pmatrix}. \quad (14)$$

여기서 f^* 는 1차원 부동 함수이고, G^* 는 g^* 의 축소된 결합 부동 함수이다. 표 1에 나타나 있듯이, 우리는 G^* 에 대한 세 개의 해를 구했다.

축소된 재규격화 연산자 $\tilde{\mathcal{R}}$ 의 부동점 (f^*, G^*) 에 가해진 미소 섭동 (h, Φ) 를 생각하자. $\tilde{\mathcal{R}}$ 을 부동점에 대해서 선형화하면, (h, Φ) 에 대한 되돌이 방정식인 $(h_{n+1}, \Phi_{n+1}) = \tilde{\mathcal{L}}(h_n, \Phi_n)$ 을 얻게된다. 한 쌍의 섭동 (h^*, Φ^*) 가 $\tilde{\mathcal{L}}(h^*, \Phi^*) = \lambda(h^*, \Phi^*)$ 인 식을 만족하면, 그것을 고유치 λ 를 갖는 고유섭동이라고 부른다. 세 개의 부동점 (f^*, G^*) 모두가 1차원 본뜨기의 비선형 매개변수의 축척과 관련된 고유치 $\delta (= 4.669 \dots)$ 을 공통의 관련 고유치로 갖고 있다. 그러나, 표 1에 나타나 있듯이 결합 섭동과 관련된 관련 결합 고유치 ν 는 부동점에 따라 다르다. 즉, 첫 번째 부동점 (f^*, G_I^*) 인 경우에는 두 개의 관련 결합 고유치 $\nu_1 = \alpha (= -2.502 \dots)$ 과 $\nu_2 = 2$ 가 존재하며, 두 번째 부동점 (f^*, G_{II}^*) 인 경우에는 한 개의 관련 결합 고유치 $\nu = 2$ 가 있는데 반해, 세 번째 부동점 (f^*, G_{III}^*) 인 경우에는 관련 결합 고유치가 없다. 아래에서 보여지듯이, 첫 번째 부동점은 결합이 0인 $c = 0$ 임계점 부근의 임계축척거동을 지배하게된다. 반면에, 두 번째와 세 번째 부동점은 임계선(critical line)에서의 임계축척거동과 관련이 있다. 임계선 내부에서는 1차원 같은 임계축척거동을 보이는데, 이것은 관련 결합 고유치가 없는 세 번째 부동점에 대해서 지배된다. 이러한 1차원과 같은 임계거동은 임계선의 양 끝점을 통과하면서 끝나게 된다. 이 양 끝점 부근의 임계거동은 두 번째 부동점에 대해서 지배된다. 그리고, 우리는 또 다른 녹립적인 재규격화 방법을 써서, 축소된 재규격화 방법을 써서 얻은 결과를 똑같이 얻었다 [12].

위에서 얻은 재규격화 결과는 구체적인 결합 1차원 본뜨기에서 확인되어졌다. 자세한 점은 참고문헌 [13]을 참조하길 바란다. 결합 본뜨기 (1)에서, 1차원 본뜨기는 $f(x) = 1 - Ax^2$ 이고, 결합 함수는 $g(x, y) = c(y - x)$ 인 경우를 예로 생각하자. 이 경우에 주기배가로 태어난 동기화된 궤도의 안정성 도표는 그림 1에 나타나 있다. 여기서 $A_\infty (= 1.401, 155 \dots)$ 는 1차원 본뜨기에서의 주기배가의 집적점(accumulation point)을 나타낸다. 이 안정성 도표의 구조를 살펴보면, 점근적으로 다음과 같은 “안정성 나

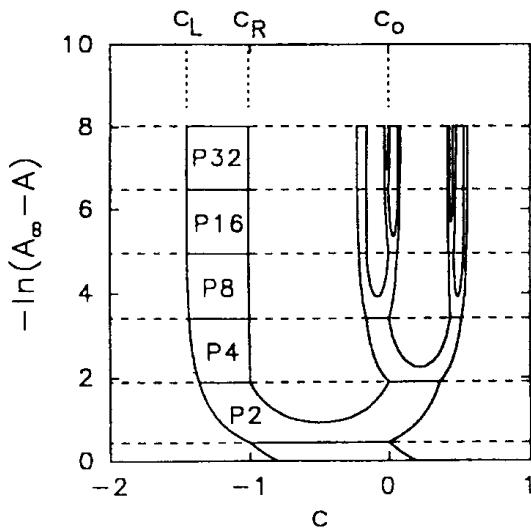


그림 1. 선형 결합된 두 개의 1차원 본뜨기에서 주기배가로 태어난 동기화된 케도의 안정성 도표. P_N 은 주기가 N 인 동기화된 케도의 안정성 지역을 나타낸다.

무”(stability tree) 구조를 갖고 있다. 여기서 안정성 지역의 U자-모양 분기는(U-shape branching) 결합이 0인 ($c = 0$) 점을 포함하는 면에서만 계속해서 일어나게 되고, 이와 같은 U자-모양 안정성 지역을 계속해서 따라가면 결합이 0인 임계점에 도달하게 된다(그림 1에서 c_0 로 표시되어있음.). 반면에 $c = 0$ 을 포함하고 있지 않은 면에서는 유한하게 몇 번 U자-모양 분기가 있어날 수는 있지만, 궁극적으로는 그러한 U자-모양 분기없이 마치 “굴뚝” 같이 자라서 임계선에 도달하게 된다. 예로 그림 1에 가장 왼쪽에 있는 양끝점이 c_L ($= -1.457, 727 \dots$)과 c_R ($= -1.013, 402 \dots$)인 임계선을 보길 바란다. 그렇게 해서, 주기배가의 임계집합은 결합이 0인 임계점과 무한히 많은 임계선들로 이루어지게 된다.

위와 같은 임계집합에서의 임계축적거동은 다음과 같이 앞에서 구한 축소된 재규격화 연산자의 세 개의 부동점에 대해서 지배된다. 결합이 0인 임계점에서의 임계거동은 두 개의 관련 결합 고유치 ν_1 ($= \alpha = -2.502 \dots$)과 ν_2 ($= 2$)를 갖는 첫 번째 부동점 (f^*, G_I^*)에 의해서 지배되어 진다. 예로 결합 매개변수의 임계축적거동을 살펴보면, 다음과 같은 두 항 축적법칙(two-term scaling law)을 잘 만족한다:

$$c_n = C_1 \mu_1^{-n} + C_2 \mu_2^{-n} \quad \text{for large } n. \quad (15)$$

여기서, 첫 번째 결합 매개변수 축척인수는 다름아닌 첫 번째 관련 결합 고유치로 주어지는 (즉, $\mu_1 = \nu_1$) 반면에, 두 번째 결합 매개변수 축척인수는 $\mu_2 = \nu_1^2 / \nu_2$ 로 주어진다. 다음으로, 각 임계선에서의 임계거동을 살펴보자. 임계선 내부 점에서의 임계거동은 관련 결합 고유치가 없는 세 번째 부동점 (f^*, G_{III}^*)에 의해서 지배된다. 따라서, 임계선 내부에서는 c 가 비관련 매개변수가 되므로, 이 안에서의 임계거동

은 1차원 본뜨기 경우와 똑같게 된다. 그러나, 이와 같은 1차원과 같은 임계거동은 임계선 양 끝점을 통과하면서 끝난다. 이 양끝점에서의 임계거동은 한 개의 관련 결합 고유치 ν ($= 2$)를 갖는 두 번째 부동점 (f^*, G_{II}^*)에 의해서 지배된다. 이 부근에서 결합 매개변수는 다음과 같은 한 항 축적법칙(one-term scaling law)을 만족한다:

$$c_n \sim \mu^{-n} \quad \text{for large } n. \quad (16)$$

이 경우에 결합 매개변수 축척인수 μ 는 관련 결합 고유치 ν 로 주어진다 (즉, $\mu = \nu$).

위와 같은 두 결합 본뜨기의 결과는 어렵지 않게 많은 결합 본뜨기 경우로 확장이 되어진다. 특히, 대국적 결합 경우(globally-coupled case)에는 구성인자 수 N 에 관계없이 임계집합의 구조와 임계거동이 두 결합인 경우($N = 2$)와 똑같다. 실제로, 위에서의 재규격화 결과는 대국적 결합인 경우로 쉽게 일반화되어 진다 [10]. 반면에, 죄인접 결합과 같은 비대국적 대국인 경우에는 모든 임계선은 다 사라지고, 오직 결합이 0인 임계점만 남게 된다. 자세한 것은 참고문헌 [14]를 참고하길 바란다.

지금까지 살펴본 추상 동역학계에서 얻은 주기배가의 결과는 실제 동역학계인 결합 비선형 진동자에서도 확인되어졌다. 예로 결합 맷음변수 흔들이를 선택해서 간략히 살펴보자. 자세한 것은 참고문헌 [15]를 참고하길 바란다. 흔들이에서 시지점이 수직으로 진동하는 맷음변수 강제 흔들이는 구동 진폭이 증가함에 따라 다중 주기배가(multiple period-doubling transition to chaos)가 일어난다 [19]. 이 점이 1차원 본뜨기 경우와 크게 대조된다. 이러한 맷음변수 강제 흔들이 두 개가 대칭적으로 선형 결합된 경우에 주기배가를 공부했다. 맷음변수 강제 흔들이에서 접적점이 $A_1^* (= 0.357, 709, 845, \dots)$ 인 첫 번째 주기배가 혼돈전이와 연관된 안정성 도표를 그림 2가 보여주고 있다. 그림 1과 같은 안정성 나무 구조를 갖고 있음에 주시하자. 따라서, 주기배가의 임계집합은 결합이 0인 임계점과 무한히 많은 임계선으로 이루어져 있게 된다. 그리고, 임계집합에서의 임계거동도 결합 1차원 본뜨기 경우와 똑같다. 또한, 많이 결합된 경우의 결과도 결합 본뜨기 경우와 같다.

1차원 본뜨기 경우로 다시 되돌아 가보자. 비선형 매개변수를 증가함에 따라 무한 연속 주기배가를 통한 혼돈전이가 일어난 후에는 혼돈지역으로 들어가게 된다. 그러나, 혼돈지역이라고 해서 모든 매개변수 값에서 혼돈상태가 존재하는 게 아니다. 이 혼돈지역 내에는 안장-마디 쌍갈림(saddle-node bifurcation)으로 태어난 주기 창(periodic window)들이 무한히 박혀 있다 [20]. 따라서, 주기가 p^n 인 ($n = 1, 2, 3, \dots$) 주기창을 찾아가면 주기 p 배가 혼돈전이점에 도달하게 된다. 그리고, 각 주기 창에서 매개변수를 거꾸로 변화시켜가면 역안장-마디 쌍갈림과 관련된 간헐적인 혼돈전이가 일어나게 된다. 아래에서는 이러한 1차원 본뜨기에서의 주기 p 배가와

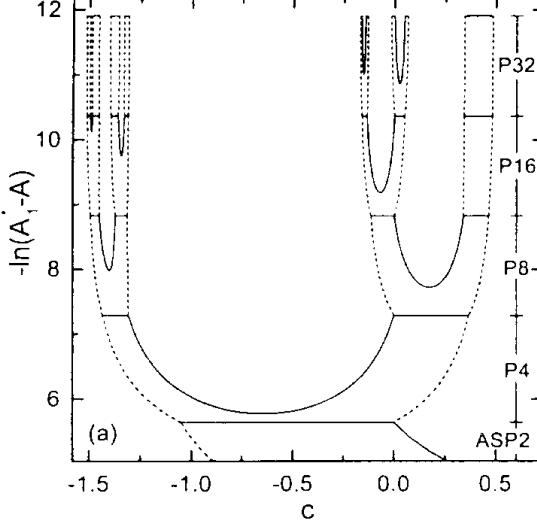


그림 2. 선형 결합된 두 개의 맷음변수 강제 흔들이에서 주기 배가로 태어난 동기화된 비대칭 궤도의 안정성 도표. $ASP2$ 는 비대칭 주기 2인 동기화된 궤도를 나타내며, PN 은 주기 N 인 동기화된 비대칭 궤도의 안정성 지역을 나타낸다.

표 2. 주기 p 배가인 경우에 축소된 결합 부동 함수와 그것들의 관련 결합 고유치 ν 를 보여주고 있다. 세 번째 줄에서 $E(O)$ 는 짹수 (홀수) 주기 p 배가에 해당한다.

	$G^*(x)$	p	ν
I	0	E, O	α, p
II	$\frac{1}{2}[f^{*'}(x) - 1]$	E, O	p
III	$\frac{1}{2}f^{*''}(x)$	E, O	nonexistent
IV	$\frac{1}{2}[f^{*''}(x) + 1]$	O	p
V	$f^{*''}(x)$	O	α, p

간헐성의 결과를 결합 1차원 본뜨기 경우로 확장한다.

그러면, 결합 본뜨기에서의 주기 p 배가부터 살펴보자. 자세한 것은 참고문헌 [16]을 참고하길 바란다. 주기배가 경우와 같이, 축소된 재규격화 방법을 써서 일반적인 주기 p 배가를 공부했다. 귀납법(induction)을 써서, 모든 p 에 대해서 축소된 재규격화 연산자의 부동점 (f^*, G^*) 를 얻었다. 여기서 f^* 는 1차원 본뜨기에서 주기 p 배가의 부동 함수이며, p 에 따라 변한다 [3]. 그리고 표 2에 나타나있듯이, p 가 짹수인 경우에는 세 개의 축소된 결합 부동 함수가 존재하는데 반해, p 가 홀수인 경우에는 다섯 개의 축소된 결합 부동 함수가 존재한다. 예로 주기 3배가 경우를 살펴보자. 1차원 본뜨기에서 접적점이 $A_\infty^{(3)} = 1.786440255 \dots$ 인 주기 3배가에 연관된 안정성 도표를 그림 3이 보여주고 있다. 각 단계의 주기궤도들은 자신의 안장-마디 쌍갈림으로 태어나기 때문에, 각 단계의 안정성 지역들이 주기배가와는 달리 불연속적이다. 그러나 이러한 안정성 도표의 구조를 살펴보면 주기배가와 유사하다. 결합이 0인 $c = 0$ 점을 포함하고 있는 안정성 지역은 그 다음 단계에서는 세 개의 보다 작은 안정

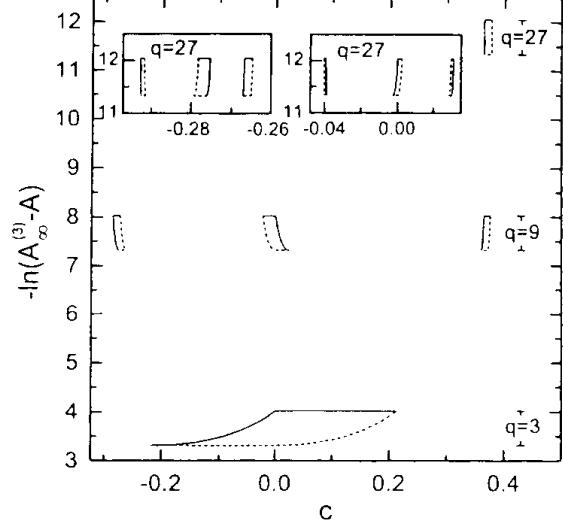


그림 3. 선형 결합된 두 개의 1차원 본뜨기에서 주기 3배가로 태어난 동기화된 궤도의 안정성 도표. 안장-마디 쌍갈림으로 태어난 주기 $q = 3^n$ ($n = 1, 2, 3$)인 궤도의 안정성 지역을 보여주고 있다.

성 지역으로 분기한다. 그래서, $c = 0$ 를 포함하는 안정성 지역을 계속해서 쫓아가면, 결합이 0인 임계점에 도달하게 된다. 그리고, $c = 0$ 를 포함하지 않는 면은 궁극적으로 분기 없이 나아가게 된다. 그렇게 해서, 주기 3배가의 임계집합은 결합이 0인 임계점과 무한히 많은 임계선으로 이루어지게 된다. 결합이 0인 임계점 부근에서의 임계거동은 두 개의 관련 결합 고유치 α ($= -9.277341 \dots$)와 3을 갖는 첫 번째 부동 점 (f^*, G_I^*) 에 의해서 지배된다. 그리고, 임계선 내부에서의 임계거동은 1차원 본뜨기 경우와 같으므로 관련 결합 고유치가 없는 두 번째 부동점 (f^*, G_{II}^*) 에 의해서 지배된다. 또한, 그러한 1차원과 같은 임계거동은 임계선의 양 끝점을 통과하면서 끝나게 된다. 이 양 끝점에서의 임계거동은 각각 한 개의 관련 결합 고유치 3을 갖고 있는 세 번째와 네 번째 부동점 (f^*, G_{III}^*) 와 (f^*, G_{IV}^*) 에 의해서 지배된다.

끝으로, 결합 본뜨기에서의 간헐성을 살펴보자. 자세한 것은 참고문헌 [17]을 참고하길 바란다. 우선 주시할 점은 간헐성에 대한 재규격화 변환에 있어서 시간축척은 앞에서의 주기 p 배가와는 달리 임의로 몇 배 늘려도 최종 결과에 상관이 없다는 것이다. 여기선 편의상, 주기배가와 같이 시간 축척을 두 배 늘리는 경우를 생각하자. 따라서, 재규격화 변환 N 은 주기배가 경우와 같게 된다 [식 (3)을 참조바람]. 다만, 비결합된 1차원 본뜨기가 안장-마디 쌍갈림과 관련된 간헐성에 적합한 경계조건 $f(0) = 0$ 과 $f'(0) = 1$ 을 만족해야 한다. 나머지는 주기배가와 똑같은 과정을 밟으면 된다. 우리는 두 개의 축소된 재규격화 연산자의 부동점 (f^*, G_I^*) 와 (f^*, G_{II}^*) 를 구했다. 여기서 f^* 는 1차원 본뜨기 경우의 부동 함수이며, 이미 해석적으로 구해져 있다 [4]. 축소된 결합 부동 함수 G^* 에 대한 해는 급수 전개(series expansion) 방법을 써

서 다음과 같이 구했다:

$$G_I^*(x) = \frac{1}{2} \left[1 + zax^{z-1} + z \left(z - \frac{1}{2} \right) a^2 x^{2(z-1)} + \dots \right], \quad (17)$$

$$G_{II}^*(x) = \frac{1}{2} \left[bax^{z-1} + b \left(\frac{3z-b}{2} - \frac{1}{2} \right) a^2 x^{2(z-1)} + \dots \right]. \quad (18)$$

여기서 a 와 b 는 임의의 상수이다. 그리고 z 는 일반적으로 1보다 큰 실수이지만, 우리는 해석적인 짝수인 경우 ($z = 2, 4, 6, \dots$)만 생각한다. 이 두 부동점의 안정성 분석을 해 보면, 1차원 본뜨기의 관련 고유치는 공통으로 다 갖고 있다. 그러나, 결합 섭동과 관련된 관련 결합 고유치는 부동점에 따라 다르다. 첫 번째 부동점은 관련 결합 고유치가 없는데 반해, 두 번째 부동점은 $(z-1)$ 개의 관련 결합 고유치 ν_n ($= 2^{(z-1-n)/(z-1)}$) ($n = 0, \dots, z-2$)를 갖고 있다. 그리고, 우리는 또 다른 독립적인 재규격화 방법을 써서, 축소된 재규격화 방법을 써서 얻은 결과를 똑같이 얻었다 [18].

위의 간헐성에 대한 재규격화 결과를 확인하기 위해서 구체적으로 1차원 본뜨기 두 개가 흩어지기 결합된(dissipatively-coupled) 경우를 공부하였다. 이 경우가 가장 일반적인 $z = 2$ 에 해당한다. 그럼 4가 흩어지기 결합인 경우의 위상 도표를 보여주고 있다. 이 도표는 동기화 선에 가로지르는 방향으로의 섭동에 대한 “가로 리아프노프 지수”(transversal Lyapunov exponent)를 구해서 얻었다. 그림에서 속한 원들은 가로 리아프노프 지수가 0인 곡선을 형성한다. 이 곡선 내부에서는 가로 리아프노프 지수가 음수인 동기화된 끝개가 존재하며, 다음과 같이 두 개의 부분으로 나뉘어져 있다. 윗 P 부분에서는 동기화된 주기-3 끝개가 존재하는데 반해, 아래 C 부분에서는 동기화된 혼돈 끝개가 존재한다. 그리고, 이 두분 사이에 실선으로 나타낸 경계선이 다름아

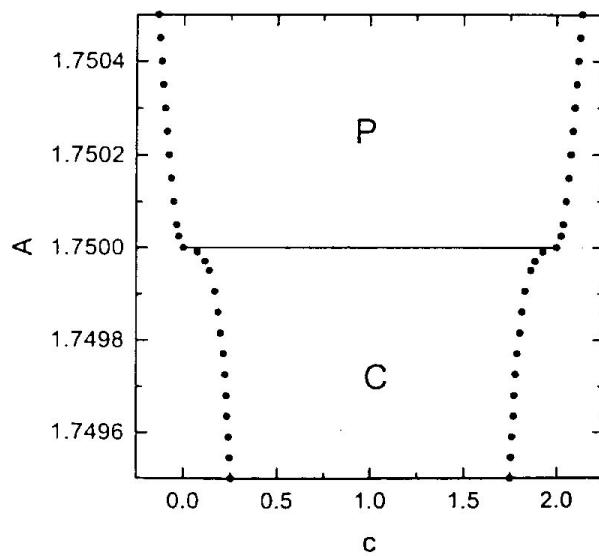


그림 4. 흩어지기 결합된 두 개의 1차원 본뜨기에서 간헐성에 대한 위상도표.

닌 임계선이며, 가로 리아프노프 지수가 0인 주기-3인 동기화된 끝개가 존재한다. 이러한 P 지역에서 C 지역으로 임계선 내부를 통과하면서, 1차원 본뜨기에서와 같은 간헐적인 혼돈전이가 동기화 선 위에서 일어난다. 이러한 임계선 내부 점에서 1차원과 같은 간헐적인 혼돈전이와 연관된 임계거동은 관련 결합 고유치가 없는 첫 번째 부동점에 의해서 지배된다. 그러나, 임계선 양 끝점을 통과하면서 주기-3 동기화된 궤도의 가로 리아프노프 지수가 0보다 커지게 되어서 비동기화(desynchronization)가 일어나게 된다. 그 결과 동기화선 위의 주기-3 궤도는 더이상 끝개가 아니며, 새로운 비동기화된 끝개가 나타난다. 이러한 동기화 상태에서 비동기화된 상태로의 전이로 인해서, 동기화선 위에서 일어나는 1차원과 같은 간헐적인 혼돈전이가 임계선의 양 끝점을 통과하면서 끝나게 된다. 그리고, 이 양 끝점에서의 임계거동은 관련 결합 고유치가 2인 두 번째 부동점에 의해서 지배된다.

전체적으로 요약하면, 축소된 재규격화 방법을 써서 주기 배가, 보다 높은 주기 p 배가, 그리고 간헐성에 대한 임계거동을 분석했다. 그리고, 이러한 재규격화 결과는 추상 동역학계인 결합 1차원 본뜨기와 실제 동역학계인 결합 진동자에서 확인되었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단(핵심과제(921-0200-009-2)와 '95 한미특별협력프로그램), 한국학술진흥재단('93, '94 그리고 '97 자유공모과제) 그리고 교육부(기초과학연구소 과제: BSRI-94-2401와 BSRI-95-2401) 지원으로 이루어졌다.

참 고 문 헌

- [1] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979).
- [2] P. Cvitanović, in *Universality in Chaos*, edited by P. Cvitanović (Adam Hilger, Bristol, 1983), p. 29.
- [3] B. Derrida, A. Gervois and Y. Pomeau, *J. Phys. A* **12**, 269 (1979); W.-Z. Zeng and H.-L. Hao, *Commun. Theor. Phys.* **3**, 283 (1984).
- [4] J. E. Hirsh, M. Nauenberg and D. J. Scalapino, *Phys. Lett. A* **87**, 391 (1982); B. Hu and J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1645 (1982).
- [5] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff and S. J. Shenker, *Physica D* **5**, 405 (1982); S. Ostlund, D. Rand, J. Sethna and E. Sigga, *Physica D* **8**, 303 (1983).
- [6] K. Kaneko, in *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*, edited by K. Kaneko (John Wiley & Sons, New York, 1986).

- [7] I. Waller and R. Kapral, Phys. Rev. **A30**, 2047 (1984); R. Kapral, Phys. Rev. **A31**, 3868 (1985).
- [8] S. P. Kuznetsov, Radiophys. Quantum Electron. **28**, 681 (1985); S. P. Kuznetsov and A. S. Pikovsky, Physica **D19**, 384 (1986).
- [9] H. Kook, F. H. Ling and G. Schmidt, Phys. Rev. **A43**, 2700 (1991).
- [10] S.-Y. Kim and H. Kook, Phys. Rev. **E48**, 785 (1993).
- [11] S.-Y. Kim, Phys. Rev. **E49**, 1745 (1994).
- [12] S.-Y. Kim and H. Kook, Phys. Lett. **A178**, 258 (1993).
- [13] S.-Y. Kim and H. Kook, Phys. Rev. **A46**, R4467 (1992).
- [14] S.-Y. Kim and H. Kook, in *the Proceeding of The First International Workshop on Nonlinear Dynamics and Chaos*, edited by H. Lee (Pohang Institute of Science and Technology, Pohang, 1993), p. 49.
- [15] S.-Y. Kim and K. Lee, Phys. Rev. **E54**, 1237 (1996).
- [16] S.-Y. Kim, Phys. Rev. **E52**, 1206 (1995); **54**, 3393 (1996).
- [17] S.-Y. Kim (to appear in the Phys. Rev. E).
- [18] S.-Y. Kim (to appear in the Phys. Rev. E).
- [19] S.-Y. Kim and K. Lee, Phys. Rev. **E53**, 1579 (1996).
- [20] R. M. May, Nature **261**, 459 (1976).

Transition to Chaos in Coupled Nonlinear Dynamical Systems

Sang-Yoon KIM

Department of Physics, Kangwon National University, Chunchon 200-701

In this paper, I will review some of my recent works on the transition to chaos in the coupled dynamical systems. Using the “reduced” renormalization method, universal critical scaling behaviors associated with period-doubling, period p -tupling ($p = 3, 4, \dots$), and intermittent transitions to chaos have been analyzed in the coupled one-dimensional (1D) maps. These renormalization results have been also confirmed both in the abstract system of the coupled 1D maps and in the real system of the coupled nonlinear oscillators.