

맺음변수 강제 혼들이의 비선형 동역학

김 상 윤*

강원대학교 물리학과, 춘천 200-701

이 논문은 지지점이 수직으로 진동하는 맺음변수 강제 혼들이의 비선형 동역학에 관한 최근 본인의 일에 대한 해설이다. 맺음변수 강제 혼들이 계에는 두 개의 평형점이 있다. 하나는 수직 아래로 향하는 짜임새에 해당하는 “정상 상태”(normal state)이고, 다른 하나는 수직 위로 향하는 짜임새에 해당하는 “반전 상태”(inverted state)이다. 놀랍게도, 수직 진동의 진폭이 증가함에 따라, 이 두 평형점들은 계속 반복하면서 “부활”하게 된다. 즉, 불안정해진 후에 안정해지고, 다시 불안정해지는 것을 무한히 반복하게 된다. 이러한 부활과 연관된 쌍갈림을 수직 진동의 진폭과 주파수를 바꾸면서 자세하게 탐구하였다. 그 결과, 평형점들의 부활에 대한 일개를 발견했다. 또한, 각 평형점이 불안정해진 후에는 무한 연속 주기배가 뒤따라 일어난다. 따라서, 구동 진폭을 증가시켜 감에 따라, 다중 주기배가 혼돈전이가 일어나게 된다.

지지점이 수직으로 진동하는 맺음변수 강제 혼들이(parabolically forced pendulum)를 생각하자. 표준 비선형 진동자 중의 하나인 이 계의 운동은 다음과 같은 이차 비자율 상미분 방정식으로 기술되어진다 [1]:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + ml(g - \epsilon\omega^2 \cos \omega t) \sin \theta = 0. \quad (1)$$

여기서 윗 점(overdot)은 시간에 대한 미분을 나타내며, I 는 총관성모멘트이고, b 는 감쇠 계수이며, m 은 질량을 무시할 수 있을 정도로 가벼운 막대 끝에 부착된 질량이고, θ 는 수직 아래 선으로부터 시계반대방향으로 측정된 각변위이며, $\epsilon\omega$ 는 지지점 수직진동의 구동 진폭과 주파수이다. $\omega t \rightarrow 2\pi t$ 와 $\theta \rightarrow 2\pi x$ 로 틀맞춤화하면, 식 (1)은 다음과 같이 무차원 틀맞춤화된 형태가 된다:

$$\ddot{x} + 2\pi\beta\Omega\dot{x} + 2\pi(\Omega^2 - A \cos 2\pi t) \sin 2\pi x = 0. \quad (2)$$

여기서 $\omega_0 = \sqrt{mgl/I}$, $\beta = b/I\omega_0$, $\Omega = \omega_0/\omega$, 그리고 $A = m\epsilon/I$ 이다. 이와 같이 간단해 보이는 맺음변수 강제 혼들이에서 매우 다양한 동역학적 거동이 수치적으로 [2], 해석적으로 [3], 그리고 실험적으로 [4] 발견되어졌다.

이러한 맺음변수 혼들이에는 두 개의 평형점(equilibrium point)이 있다. 하나는 $x = 0$ 인 수직 아래로 향하는 짜임새에 해당하는 “정상 상태”(normal state)이고, 다른 하나는 $x = \frac{1}{2}$ 인 수직 위로 향하는 짜임새에 해당하는 “반전 상태”(inverted state)이다. 우리는 이러한 평형점의 안정성에 관심이 있다. 정상 상태인 경우에 $\Omega \sim \frac{n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 불안정성이 일어나는 맺음변수 공명(parametric resonance)은 잘 알려져 있다 [1]. 그리고, 반전 상태인 경우에는 구동 진폭 A 가 어떤 임계값을 지나면 안정해진다. 이러한 반전 혼들이의 안정화는 이론적으로 [5-11] 그리고 실험적으로 [12] 입증되었다.

본 해설에서는 이러한 두 평형점의 안정성과 연관된 쌍갈림과 혼돈전이에 대한 최근 본인의 일을 [13-15] 다루고자 한다. 이 두 개의 평형점의 안정성은 다음과 같은 감쇠 마띠유 방정식 (Mathieu equation)에 의해서 결정된다:

$$\ddot{u} + 2\pi\beta\Omega\dot{u} + 4\pi^2(\pm\Omega^2 + A \cos 2\pi t)u = 0. \quad (3)$$

여기서 $+ (-)$ 부호는 정상(반전) 상태에 해당한다. 마띠유 방정식에서 Ω 값이 주어진 경우에 진폭 A 가 증가함에 따라 안정영역과 불안정 영역이 번갈아 가며 계속해서 나타난다는 점은 잘 알려져 있다 [16]. 따라서, 구동 진폭이 증가함에 따라, 위 두 평형점들은 계속 반복하면서 “부활”하게 된다. 즉, 불안정해진 후에 안정해지고, 다시 불안정해지는 것을 무한히 반복하게 된다. 우리는 틀맞춤화된 구동 진폭 A 와 자연 진동수 Ω 를 바꾸면서 두 평형점의 이러한 생생과 연관된 쌍갈림 거동을 플로케 이론을 [17] 써서 자세하게 분석한다.

첫 번째로 정상 상태의 안정성과 연관된 쌍갈림 현상을 살펴보자. 자세한 것은 참고문헌 [13]을 참조하길 바란다. 틀맞춤화된 감쇠 계수의 값을 $\beta=0.2$ 로 고정시키고, 두 개의 매개변수 Ω 와 A 를 바꾸면서 쌍갈림을 공부했다. 주어진 Ω 에 대해서 A 를 증가시켜 감에 따라, 정상 상태가 다중 주기배가 혼돈전이(multiple period-doubling transitions to chaos)를 보인다. 이 점은 오직 한번 주기배가 혼돈전이를 보이는 1차원 본뜨기 경우와 크게 대조된다 [18].

그림 1은 그러한 정상 상태의 안정성 도표를 보여주고 있다. 무한히 많은 불연속된 불안정성 지역들이 $\Omega - A$ 평면에 존재하고 있다. 이 불안정 지역들을 살펴보면 아래 부분이 혀(tongue) 모양을 하고 있어서, 이것들을 “혀”라고 부른다. 그리고, $\beta = 0$ 인 비감쇠 경우에 맺음변수 공명이 $(\Omega, A) = (\frac{n}{2}, 0)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서 일어나므로, 각 혀에 정수 n 레벨을 붙일 수가 있다. 그래서, 그림 1에서 차수가 n 인 혀를 T_n 으로 나타냈다.

A 가 증가함에 따라, 각 혀 T_n 은 왼쪽으로 휘어서, 전 단계

*E-mail: sykim@cc.kangwon.ac.kr

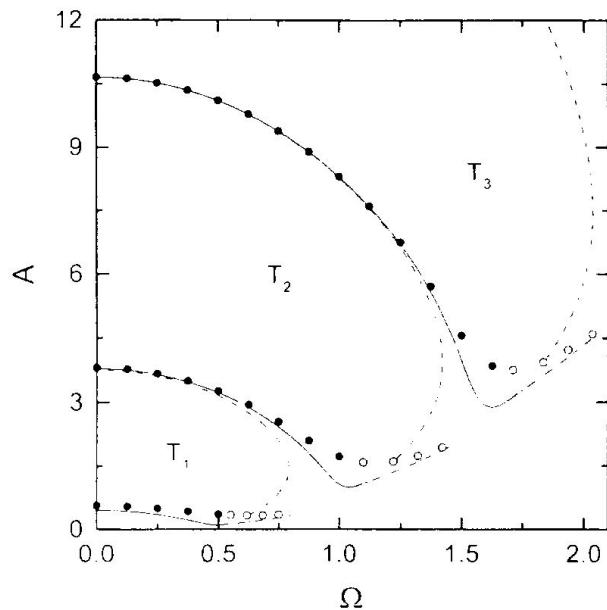


그림 1. 정상 상태의 안정성 도표. 여기서 T_n 은 차수가 n 인 불안정성 지역을 나타낸다. 또한 실선과 대시 또는 점선은 각각 초임계와 버금임계 쌍갈림 곡선을 나타낸다. 그리고 속이 차거나 빈 원들은 무한연속 주기배가의 집적점을 나타낸다.

혀인 T_{n-1} 위에 놓인다. 이와 같이 해서, 혀들이 연속적으로 쌓여간다(그림 1 참조). 결과적으로, A 가 증가함에 따라 안정 영역과 불안정 영역이 번갈아 가면서 나타나게 된다. 따라서, 정상 상태가 불안정 후에 안정해지고, 다시 불안정해지는 “부활” 과정을 무한히 반복하게 된다.

그러한 정상 상태의 부활과 관련해서, 혀 경계에서 쌍갈림을 자세히 탐구하였다. 그것들은 혀의 차수 n 에 따라 다르다. 홀수 차수 혀의 경계를 통과할 때는 주기 배가 쌍갈림이 일어나는데 반해서, 짝수 차수 혀의 경계를 통과할 때는 갈퀴 쌍갈림(pitchfork bifurcation)이 일어난다. 예를 들면, 그림 1에서 T_1 과 T_3 의 경계선은 주기배가 쌍갈림 선이며, T_2 의 경계선은 갈퀴 쌍갈림 선이다. 또한, 그림 1에서 대시-점곡선(dsah-dotted curve)은 안장-마디 쌍갈림 (saddle-node bifurcation) 선을 나타내는데, n 이 홀수(짝수)인 경우에 한 쌍의 하나는 안정하고 다른 하나는 불안정한 주기 2(1)인 궤도가 이 곡선에서 태어난다. 이러한 안장-마디 쌍갈림 선들이 각 혀의 경계선과 만나는 점을 경계로 초임계(supercritical)와 버금임계(subcritical) 부분으로 나누어 진다. 그림 1에서, 초임계 부분은 실선(solid line)으로 나타냈고, 버금임계 부분은 점선과 대시선으로 나타냈다. 따라서 경계선에서 실선 부분을 통과할 때 평형점이(혀의 차수에 따라) 초임계 주기배가 또는 갈퀴 쌍갈림을 통해서 불안정해진 후에, 계는 점근적으로 주기배가 된 혹은 같은 주기의 끝개로 끌려가게 된다. 반면에, 버금임계 경계부분을 통과하면, 평형점이 안장-마디 쌍갈림으로 태어난 불안정한 주기 궤도를 흡수하면서

불안정해진다. 그리고 난 다음에, 계의 점근 상태는 버금임계 부분에 따라 다르게 된다. 점선 부분을 통과한 후에는, 계가 주기적인 끝개로 점프하는데 반해, 대시선을 통과하고 나서는 큰 규모의 혼돈 끝개로 끌려가게 된다. 한편, 안장-마디 쌍갈림으로 태어난 안정궤도는 무한 연속 주기배가 쌍갈림을 통해 혼돈전이를 하며, 이 때의 임계점은 그림 1에서 열린 원들로 나타내었다.

A 를 상당히 크게 증가시키면서 정상상태의 안정성과 관련된 쌍갈림 현상을 여러 개의 Ω 에서 면밀히 관찰해보면, 그림 1에서 보여주는 것처럼 임의의 Ω 에서 평형점은 버금임계 주기배가와 갈퀴 쌍갈림을 통해 번갈아 가면서 안정성을 회복하게 된다. 반면에, Ω 에 따라서 평형점이 초임계 또는 버금임계 쌍갈림을 통해 처음으로 불안정해지지만 (예를 들면, $\Omega=0.5(0.65)$ 에서는 초임계(버금임계) 주기배가 쌍갈림을 통해 처음으로 불안정해진다), 그 후로는 초임계 주기배가와 갈퀴 쌍갈림을 통해 번갈아 가면서 안정성을 잃어버리게 된다. 그와 같이 초임계 쌍갈림을 통해 불안정해진 다음에는 무한연속 초임계 주기배가 쌍갈림이 뒤따라 일어나며 임계점에서 끝나게 된다. 이러한 임계점들이 그림 1에서 속찬 원들로 나타내고 있으며, 이 임계점을 지나면 한 쌍의 작은 혼돈 끝개가 나타난다. 각 혀에서 그리한 주기배가의 임계점들은 매끄러운 임계선을 형성하고 있다(그림 1참조). 따라서, A 가 증가함에 따라 정상 상태는 다중 주기배가 혼돈전이를 보이게 된다.

예로서, $\Omega = 0.5$ 인 경우를 생각하자. 그림 2(a)와 2(b)가 각각 첫 번째와 두 번째 주기배가 쌍갈림 도표를 보여주고 있다. 우선, 첫번째 주기배가 혼돈전이를 살펴보자. 정상 상태는 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해서 첫번째 불안정점인 $A_d(1)(= 0.100, 218, \dots)$ 에서 안정성을 잃어버리게 되며, 새로운 주기-2 대칭 궤도가 태어나게 된다. 이 대칭 주기-2 궤도는 정상 상태와는 달리 초임계 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림을 통해서 불안정해지며, 한 쌍의 주기-2 비대칭 궤도가 나타나게 된다. 그리고 난 다음에 A 를 계속해서 증가시켜 가면, 혼돈에 이르는 무한연속 주기배가 쌍갈림이 일어나고, 그것의 집적점(accumulation point)인 $A_1^*(= 0.357, 709, 84)$ 에서 끝나게 된다. 이러한 주기배가 쌍갈림 도표는 그림 2(a)가 보여주고 있다. 그리고, 임계점 A_1^* 부근에서의 임계축의 거동은 1차 본뜨기 경우와 같다 [18].

A 가 계속 증가하여 T_1 에서 대시선으로 표시된 버금임계 경계선을 통과하게 되면, 정상 상태는 첫 번째 안정성 회복 점인 $A_r(1)(= 3.150, 509, \dots)$ 에서 버금임계 주기배가 쌍갈림을 통해 안정해진다. 그러나, A 가 계속 증가하여 두 번째 혀의 초임계 갈퀴 쌍갈림 곡선 위의 두 번째 불안정점 $A_d(2)(= 3.224, 230, \dots)$ 을 통과하면서 정상 상태는 다시 불안정해진다. 이 때 주기 1이며 서로가 공액인 한 쌍의 궤도가 태어난다. 여기서 태어난 비대칭 주기-1 궤도들은 A 가 증가함에 따라 무한 연속 주기배가 쌍갈림을 하게 된다. 이와

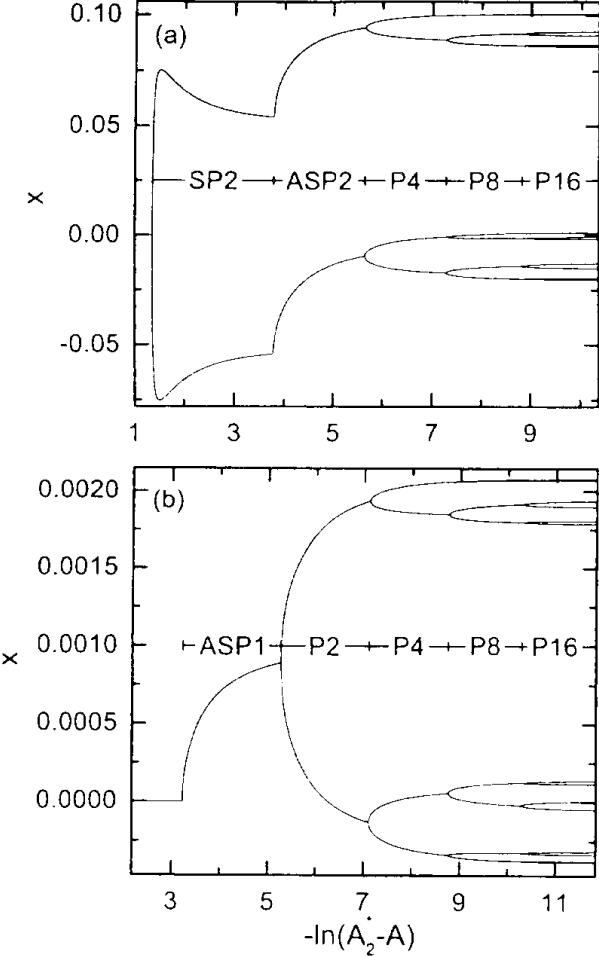


그림 2. $\Omega = 0.5$ 에서의 (a) 첫 번째와 (b) 두 번째 주기배가 쌍갈림 도표. (a)에서 SP2와 ASP2는 각각 대칭과 비대칭 주기-2 궤도의 안정한 영역을 나타낸다. (b)에서 ASP1은 비대칭 주기-1 궤도의 안정한 영역을 나타낸다. 그리고, (a)와 (b)에서 PN은 ($N = 2, 4, 8, 16$) 주기가 N 인 비대칭 궤도의 안정한 영역을 나타낸다.

같은 두 번째 무한 연속 주기배가 쌍갈림 도표가 그림 2(b)에 나타나 있다. 그리고 임계점 $A_2^* (= 3.267, 703, 15, \dots)$ 을 통과하면서 두 번째 혼돈전이가 일어나게 된다. 그리고, $A = A_2^*$ 에서 임계축적거동은 첫 번째 임계점 A_1^* 에서의 임계거동과 같다. 이와 같이 A 를 증가시켜감에 따라, 정상상태는 계속해서 안정성을 잃어버린 후에 다시 회복하는 “부활” 과정을 반복하게 된다. 그리고, 정상 상태가 불안정해진 후에는 무한 연속 주기배가 뒤따라 일어나게 되어, 결과적으로 다중 주기배가 혼돈전이가 일어난다.

이제부터는 반전 상태의 안정성과 연관된 쌍갈림 현상을 살펴보도록 하자. 자세한 것은 참고문헌 [14]를 참조하길 바란다. $A = 0$ 인 경우에는 당연히 반전 상태는 불안정하다. 그러나, A 가 증가하면서 정상 상태와 같이 반전 상태도 부활 과정을 계속해서 반복하게 된다. 즉, 불안정 후에 안정해지고, 다시 불안정해지는 과정을 계속해서 반복하게 된다. 우

리는 이러한 반전 상태의 부활과 관련된 쌍갈림을 자세히 공부했다.

우리는 반전 상태의 플로케 승수를 구해서 $\Omega - A$ 평면에서 반전 상태의 안정성 지역들을 결정했다. $S_n (n=1, 2, \dots)$ 으로 표시된 처음 세 개의 안정성 지역을 그림 3이 보여주고 있다. 각 안정성 지역은 아래 안정성 곡선 L_n 과 위 불안정성 곡선 U_n 으로 둘러싸여 있다. 그리고, 차수 n 이 증가함에 따라 안정성 지역 S_n 은 점점 작아진다. 우리는 이러한 안정성 경계 곡선에서 반전 상태의 안정성과 불안정성에 연관된 쌍갈림 거동을 탐구했다. 그것은 안정성 지역의 차수 n 이 짝수냐 홀수냐에 따라 다르다. 차수 n 이 홀수(짝수)인 안정성 곡선 L_n 을 통과하면, 불안정한 반전 상태가 갈퀴(주기배가) 쌍갈림을 통해서 안정해진다. 그러나, 불안정성 곡선 U_n 을 통과할 때는 상황이 바뀐다. 즉, 차수 n 이 홀수(짝수)인 불안정성 곡선을 통과할 때는 안정해진 반전 상태가 주기배가(갈퀴) 쌍갈림을 통해서 안정성을 잃어버리게 된다. 이러한 주

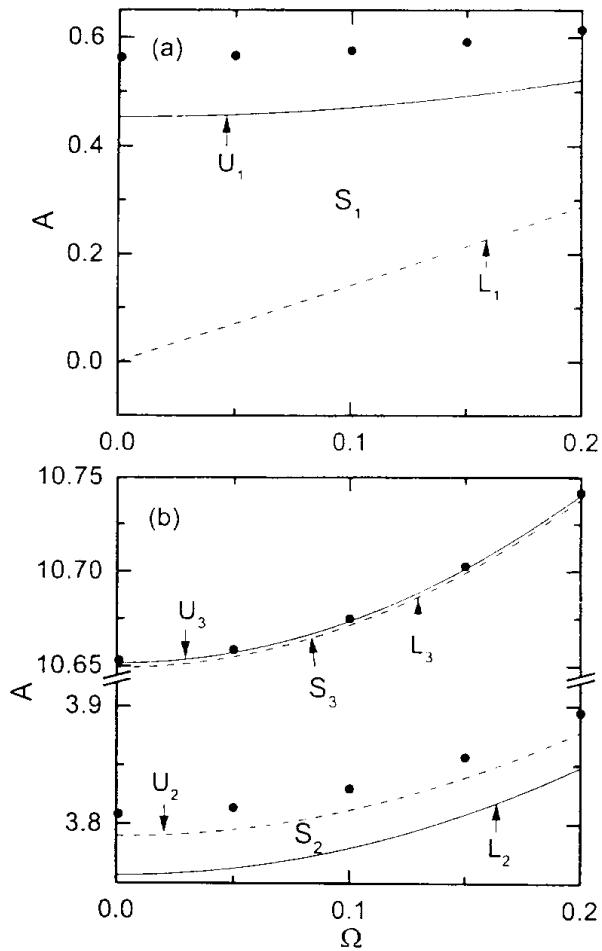


그림 3. 반전 상태의 안정성 도표. (a)와 (b)에서 처음 세 개의 안정성 지역 S_n ($n = 1, 2, 3$)을 보여주고 있다. 각 S_n 에서 실선으로 나타낸 경계선에선 주기배가 쌍갈림이 일어나는데 반해, 대시 경계선에선 갈퀴 쌍갈림이 일어난다. 다른 자세한 점은 본문을 참조바람.

기배가와 갈퀴 쌍갈림 곡선들을 각각 그림 3에서 실선과 대시선으로 나타냈다. 그리고, 주기배가와 갈퀴 쌍갈림에는 두 가지 형태의 초임계와 벼금임계 쌍갈림이 있다. 모든 안정화는 벼금임계 쌍갈림을 통해서 일어나는데 반해서, 모든 불안정화는 초임계 쌍갈림을 통해서 일어난다. 결과적으로, A 가 증가함에 따라 반전 상태는 번갈아 가면서 벼금임계 갈퀴와 주기배가 쌍갈림을 통해 안정해지는데 반해, 반전 상태의 불안정화는 번갈아 일어나는 초임계 주기배가와 갈퀴 쌍갈림을 통해서 일어난다. 그리고, 반전상태가 불안정해진 후에는 혼돈에 이르는 무한 연속 주기배가 쌍갈림이 뒤따라 일어난다. 이것들의 집적점들을 여러 Ω 값에서 구했고, 그림 3에서 속찬 원들로 나타냈다. 이러한 원들은 매끄러운 임계선들을 형성하고 있으며, 이것들을 통과할 때 주기배가 혼돈전이들이 일어난다.

$\Omega = 0.1$ 에서 반전 상태의 부활과 연관된 쌍갈림의 구체적인 예를 살펴보도록 하자. $A = 0$ 인 비구동된 경우에는 반전 상태는 분명히 불안정하다. 그러나, A 가 증가하여 첫 번째 안정성 지역 S_1 의 아래 안정성 곡선 L_1 위에 있는 첫 번째 안정성 점인 $A_s(1)(=0.142, 066, \dots)$ 을 통과하면, 불안정한 반전 상태가 벼금임계 갈퀴 쌍갈림을 통해서 안정해진다. 그림 4(a)가 반전 상태의 첫 번째 부활을 보여주고 있다. 이 벼금임계 갈퀴 쌍갈림을 통해서 한 쌍의 불안정한 비대칭 주기-1 궤도가 태어난다. 그러나, S_1 의 윗 불안정성 곡선 U_1 을 첫 번째 불안정 점인 $A_d(1)(=0.471, 156, \dots)$ 에서 통과할 때, 안정해진 반전 상태가 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해서 불안정해진다. 이 경우에 새로운 안정된 대칭 주기-2 궤도가 태어난다. A 를 계속 증가시키면서 그 이후의 쌍갈림을 또한 공부했다. 반전 상태인 경우와는 달리, 대칭 주기-2 궤도는 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림을 통해서 불안정해진다. 그 결과로, 한 쌍의 안정한 비대칭 주기-2 궤도가 태어난다. 그리고 난 다음에는, 혼돈에 이르는 무한 연속 주기배가 쌍갈림이 일어나며, 그것의 집적점인 $A_1^*(=0.575, 154, \dots)$ 에서 끝난다. 그리고, 이 임계점 A_1^* 에서의 임계거동은 1차원 본뜨기 경우와 같다.

A 를 계속 증가시키면서, 우리는 또한 반전 상태의 두 번째 부활과 연관된 쌍갈림을 공부했다. S_2 의 차수가 짝수이기 때문에, 부활과 관련된 쌍갈림의 형태가 첫 번째 부활과는 다르다. S_2 의 아래 안정성 곡선 L_2 를 두 번째 안정 점인 $A_s(2)(=3.779, 771, \dots)$ 에서 통과할 때, 첫 번째 부활과는 달리 벼금임계 주기배가 쌍갈림을 통해서 불안정해진 반전 상태가 안정성을 회복한다. 그리고, 이 때에 새로운 불안정한 주기-2 궤도가 태어난다. 그림 4(b)가 이 두 번째 부활 근처에서의 쌍갈림 도표를 보여주고 있다. 그러나, S_2 의 윗 불안정성 곡선 U_2 를 두 번째 불안정 점인 $A_d(2)(=3.811, 973, \dots)$ 에서 통과할 때, 초임계 갈퀴 쌍갈림이 일어난다. 그 결과로, 안정해진 반전 상태가 다시 불안정해지고, 새로운 한 쌍의 안정한 비대칭 주기-1 궤도가 태어나게 된다. A 를 계

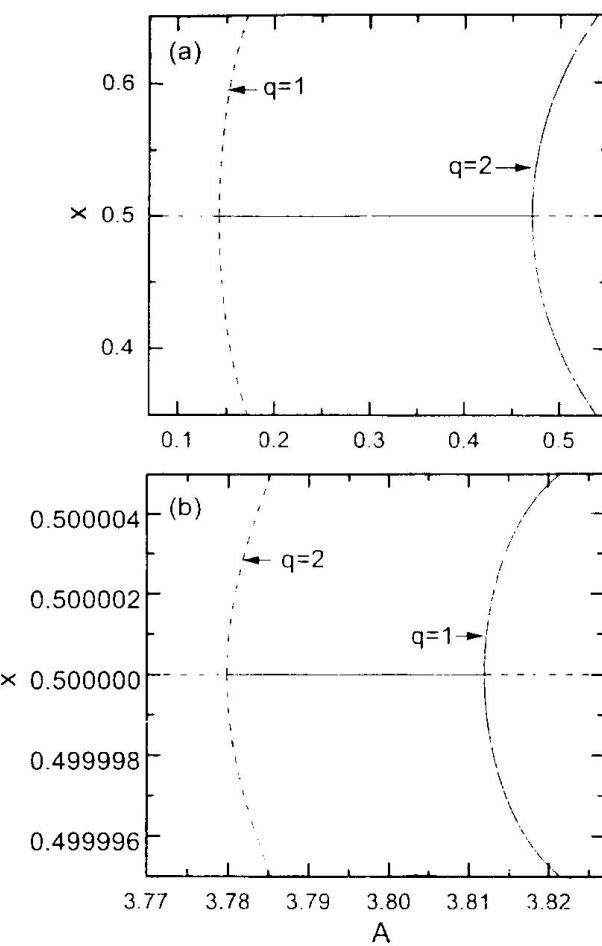


그림 4. (a) 첫 번째 부활과 (b) 두 번째 부활 근처에서의 쌍갈림 도표. 여기서 실선과 대시선은 각각 안정한 궤도와 불안정한 궤도를 나타낸다. 그리고, q 는 궤도의 주기를 나타낸다.

속 증가시켜 가면, 혼돈에 이르는 두 번째 무한 연속 주기배가 뒤따라 일어나고, 그것의 집적점인 $A_2^*(=3.829, 784, \dots)$ 에서 끝난다. 그리고, $A=A_2^*$ 부근에서의 임계거동은 첫 번째 임계점 A_1^* 에서의 임계거동과 같다. 이와 같이 A 를 증가시켜감에 따라, 반전 상태는 계속해서 안정성을 잃어버린 후에 다시 회복하는 “부활” 과정을 반복하게 된다. 그리고, 반전 상태가 불안정해진 후에는 무한 연속 주기배가 뒤따라 일어나게 되어, 결과적으로 다중 주기배가 혼돈전이가 일어난다.

종합적으로 요약하면, 맷음변수 강제 혼들이에서 정상 상태와 반전 상태 둘다 수직진동의 진폭이 커져감에 따라, 안정성을 잃어버린 후에 다시 회복하는 부활과정을 반복해 나간다. 플로케 이론을 써서 두 평형점의 안정성과 연관된 쌍갈림을 자세하게 공부해서, 이러한 부활의 일개(mechanism)를 찾아냈다. 또한 최근에 자기 혼들이에서 이러한 두 평형점의 쌍갈림에 대한 실제 실험을 진행해서 이론적 결과를 확인하였다 [15].

감사의 글

본 연구는 교육부(기초과학연구소과제: BSRI-95-2401, BSRI-96-2401와 BSRI-97-2401) 지원으로 이루어졌다.

참 고 문 현

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, New York, 1976), p. 80; V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978), p. 113.
- [2] J. B. McLaughlin, *J. Stat. Phys.* **24**, 375 (1981); R. W. Leven and B. P. Koch, *Phys. Lett.* **A86**, 71 (1981); A. Arneodo, P. Coullet, C. Tresser, A. Libchaber, J. Maurer and D. d'Humières, *Physica* **D6**, 385 (1983).
- [3] B. P. Koch and R. W. Leven, *Physica* **D16**, 1 (1985).
- [4] B. P. Koch, R. W. Leven, B. Pompe and C. Wilke, *Phys. Lett.* **A96**, 219 (1983); R. W. Leven, B. Pompe, C. Wilke and B. P. Koch, *Physica* **D16**, 371 (1985).
- [5] H. C. Corben and P. Stehle, *Classical Mechanics* (Wiley, New York, 1960), 2nd ed., p. 67.
- [6] P. L. Kapitza, in *Collected Papers of P. L. Kapitza*, edited by D. Ter Haar (Pergamon, London, 1965), p. 714.
- [7] J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems* (Interscience, New York, 1966), p. 189.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon, New York, 1976), p. 93.
- [9] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978), p. 121.
- [10] M. Levi, *SIAM Review* **30**, 639 (1988).
- [11] J. A. Blackburn, H. J. T. Smith, and N. Grønbech-Jensen, *Am. J. Phys.* **60**, 903 (1992).
- [12] M. H. Friedman, J. E. Campana, L. Kelner, E. H. Seeliger and A. L. Yerger, *Am. J. Phys.* **50**, 924 (1982); M. M. Michaelis, *Am. J. Phys.* **53**, 1079 (1985); H. J. T. Smith and J. A. Blackburn, *Am. J. Phys.* **60**, 909 (1992).
- [13] S.-Y. Kim and K. Lee, *Phys. Rev.* **E53**, 1579 (1996).
- [14] S.-Y. Kim and B. Hu, *Phys. Rev.* **E58**, 3028 (1998).
- [15] S.-Y. Kim, S.-H. Shin, J. Yi and C.-W. Jang, *Phys. Rev.* **E56**, 6613 (1997).
- [16] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1953), Sec. 5.2; J. Mathews and R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics* (Benjamin, New York, 1965), Sec. 7.5.
- [17] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory* (Dover Publications, New York, 1977), Sec. 3.5.
- [18] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979).

Nonlinear Dynamics in a Parametrically Forced Damped Pendulum

Sang-Yoon KIM

Department of Physics, Kangwon National University, Chunchon 200-701

In this paper, I will review some of my recent works on the nonlinear dynamics of a parametrically forced pendulum (PFP) with a vertically-oscillating suspension point. The PFP has two stationary points. One is the "normal" state corresponding to the vertically-up configuration, and the other is the "inverted" state corresponding to the vertically-down configuration. Surprisingly, as the amplitude of the vertical oscillation is increased, the two stationary points undergo a cascade of "resurrections", i.e., they become stabilized after their instability, destabilize again, and so forth *ad infinitum*. We make a detailed investigation of bifurcations associated with such resurrections by varying the amplitude and frequency of the vertical oscillation. As a result, the mechanisms of the resurrections are found. An infinite sequence of period-doubling bifurcations also follows each destabilization of the stationary points. Consequently, as the driving amplitude is increased, multiple period-doubling transitions to chaos occur.