

단방향으로 결합된 계에서 보편적 축척 거동

임우창* · 김상윤†

강원대학교 물리학과, 춘천 200-701

(1999년 12월 11일 받음)

두 개의 1차원 본뜨기가 단방향으로 결합된 추상 모형계에서 얻은 주기배가의 쌍임계거동에 대한 보편성을 검증하기 위해 실제 모형계인 단방향으로 결합된 비선형 진동자계를 공부했다. 두 개의 부분계가 동시에 임계상태에 놓이 있는 쌍임계점을 지나면 초혼돈전이가 일어나게 된다. 이러한 쌍임계점 부근에서 축척거동을 직접수치방법과 재규격화 방법을 써서 탐구했다. 그 결과, 첫번째 부분계인 구동계는 Feigenbaum 축척거동을 보이는데 반해서, 두번째 부분계인 반응계는 구동계와는 완전히 다른 새로운 축척거동을 보임을 발견했다. 이러한 실제 모형계에서의 쌍임계축척거동은 추상 모형계 경우와 똑같음에 주시하자. 따라서 추상 모형계에서 얻어낸 쌍임계거동은 많은 단방향으로 결합된 실제계에 적용되는 보편적 거동이라고 생각한다.

흔돈거동을 보이는 가장 간단한 동역학계인 다음과 같은 1차원 본뜨기를 생각하자:

$$x_{t+1} = 1 - Ax_t^2. \quad (1)$$

여기서 x_t 는 이산시간 t 에서의 상태 변수이다. 잘 알려져 있듯이, 맷음변수 A 를 증가시켜 감에 따라 1차원 본뜨기는 무한연속 주기배가를 통해 임계점 A_c 에서 혼돈전이를 하게 된다. 그리고, 임계점 A_c 부근에서의 보편적인 축척거동을 재규격화 방법을 써서 Feigenbaum이 발견했다 [1].

우리는 식 (1)의 1차원 본뜨기 두 개를 다음과 같이 단방향으로 결합시킨 추상 모형계에서 주기배가를 공부했다:

$$x_{t+1} = 1 - Ax_t^2, \quad y_{t+1} = 1 - By_t^2 - Cx_t^2. \quad (2)$$

여기에서 x 와 y 는 각각 첫번째 부분계와 두번째 부분계의 상태변수이고, A 와 B 는 각 부분계의 맷음변수, 그리고 C 는 결합맷음변수이다. 첫번째 부분계(구동계)는 두번째 부분계(반응계)에 영향을 미치지만, 두번째 부분계는 첫번째 부분계에 영향을 줄 수 없음을 주시하자. 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기는 열린 흐름의 모형으로 많이 사용되어 왔다 [2]. 또한, 이러한 종류의 단방향으로 결합된 계는 혼돈동기화를 이용한 암호통신분야에서 활발히 논의되고 있다 [3].

단방향으로 결합된 1차원 본뜨기에서 두 부분계의 주기배가 혼돈전이 임계선이 만나는 쌍임계점 부근에서 새로운 축척거동이 러시아 그룹 [4]에 의해서 처음으로 발견되었다. 최근에 우리는 새로운 고유값 맞춤 재규격화 방법을 도입해서 쌍임계거동을 분석하였고, 높은 정밀도로 축척계수들을 얻을 수 있었다 [5]. 여기서 우리는 추상 모형계에서 나타나는 이러한 쌍임계거동이 두 개의 주기배가 부분계로 구성된 실제

계에서도 나타나는지 확인하고자 한다. 그러한 실제계의 예로서 단방향으로 결합된 흔들이 계를 공부했다. 우선 추상 모형계인 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기에서의 쌍임계거동을 간략히 설명하고자 한다.

그림 1은 $C = 0.45$ 일 때 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기에서 주기배가 쌍갈림으로 태어난 주기궤도들의 안정성 도표를 보여주고 있다. 각각 다른 영역 안의 숫자들은 두번째 부분계 궤도들의 주기를 나타낸다. A 가 증가함에 따라 첫번째 부분계는 수직 실선들에서 주기배가 쌍갈림을 한다. 이 수직 실선은 첫번째 부분계에서 혼돈전이가 일어나는 수직 대시선(dashed line)에 접적한다. 낮은 B 값에서 두번째 부분계의 궤도들의 주기는 첫번째 부분계의 것과 같다. 이것

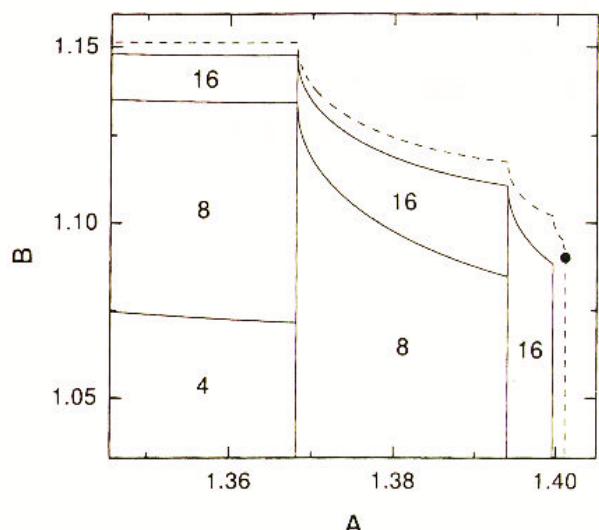


그림 1. $C = 0.45$ 일 때 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기에서 주기배가 쌍갈림으로 태어난 주기궤도들의 안정성 도표. 수직 및 비수직 대시선은 각각 첫번째와 두번째 부분계의 임계선을 나타낸다. 그리고 두 임계선은 속이 찬 원으로 표시된 쌍임계점에서 만난다. 보다 더 자세한 것은 본문을 참조하기 바람.

*E-mail: wclim@miraे.kangwon.ac.kr

†E-mail: sykim@cc.kangwon.ac.kr

은 구동 진동의 경우와 같은 것이다. 고정된 A 값에서 B 값이 증가함에 따라 두번째 부분계도 비수직 실선들에서 주기 배가 쌍갈림을 하고, 이는 비수직 대시선에 접적한다. 이 비수직 임계선을 지나서 두번째 부분계에서 혼돈전이가 일어난다. 이 두 임계선은 속이 찬 원으로 표현된 쌍임계점에서 만나며, 이 쌍임계점을 지나면 초혼돈전이가 일어나게 된다.

쌍임계점 부근에서의 축척거동을 살펴보기 위해서, 쌍임계점으로 수렴하는 맷음변수 수열 $\{(A_n, B_n)\}$ 과 원점으로 접근하는 궤도수열 $\{(x_n, y_n)\}$ 을 얻었다. 첫번째 부분계인 경우에 $\{A_n\}$ 과 $\{x_n\}$ 은 1차원 본뜨기의 경우와 같다. 따라서, 첫번째 부분계에서의 축척거동은 1차원 본뜨기의 경우와 같다. $\{A_n\}$ 과 $\{x_n\}$ 은 다음과 같이 각각의 극한값 $A_c (= 1.401 155 189 092 \dots)$ 과 $x = 0$ 에 기하급수적으로 수렴한다:

$$A_n - A_c \sim \delta_1^{-n}, \quad x_n \sim \alpha_1^{-n}. \quad (3)$$

여기서 축척계수 δ_1 과 α_1 은 1차원 본뜨기에서의 Feigenbaum 상수 $\delta (= 4.669 \dots)$ 과 $\alpha (= -2.502 \dots)$ 이다. 그러나, 두번째 부분계는 첫번째 부분계와는 다른 새로운 축척거동을 보인다. 이 경우에 $\{B_n\}$ 과 $\{y_n\}$ 은 다음과 같이 각각 극한값 $B_c (= 1.090 094 348 701)$ 과 $y = 0$ 에 기하급수적으로 수렴한다:

$$B_n - B_c \sim \delta_2^{-n}, \quad y_n \sim \alpha_2^{-n}. \quad (4)$$

여기서 두 축척계수 δ_2 와 α_2 는

$$\delta_2 \simeq 2.3928, \quad \alpha_2 \simeq -1.5053 \quad (5)$$

이며, 이것들은 첫번째 부분계에서의 축척계수, 즉 1차원 본뜨기에 대한 Feigenbaum 상수들과는 완전히 다르다. 또한, 새로운 고유값 맞춤 재규격화 방법을 써서 위와 같은 축척결과들을 얻었다. 자세한 재규격화 결과에 대해서는 참고 문헌 [5]을 참조하기 바란다.

이러한 추상 모형계에서의 쌍임계축척거동을 실제 모형계에서 확인하기 위해 다음과 같이 단방향으로 결합된 두 개의 맷음변수 강제 혼들이를 공부했다:

$$\dot{x}_1 = y_1, \quad (6a)$$

$$\dot{y}_1 = f_A(x_1, y_1, t), \quad (6b)$$

$$\dot{x}_2 = y_2 + C(x_2 - x_1), \quad (6c)$$

$$\dot{y}_2 = f_B(x_2, y_2, t) + C(y_2 - y_1). \quad (6d)$$

여기서 $f_A(x, \dot{x}, t) = -2\pi\beta\Omega\dot{x} - 2\pi(\Omega^2 - A \cos 2\pi t) \sin 2\pi x$ 이다. 그림 2는 $\beta = 1.0$, $\Omega = 0.5$, 그리고 $C = -0.2$ 일 때 주기배가 쌍갈림으로 태어난 주기궤도들의 안정성 도표를 보여주고 있다. 대시선으로 표시된 첫번째와 두번째 부분계의 주기배가 임계선들이 속이 찬 원으로 표시된 쌍임계점 $(A_c, B_c) [= (0.798 049 182 451 9, 0.802 377 2)]$ 에서 만나고 있다. 이 쌍임계점 부근에서의 축척거동을 직접수치방법

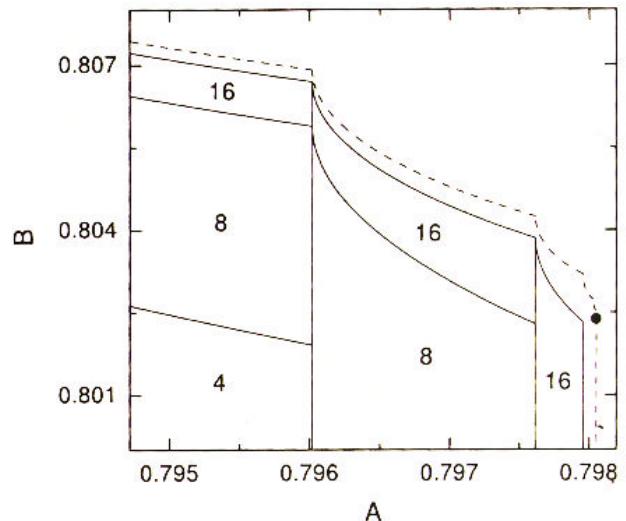


그림 2. $\beta = 1.0$, $\Omega = 0.5$, 그리고 $C = -0.2$ 일 때 단방향으로 결합된 맷음변수 강제 혼들이에서 주기배가 쌍갈림으로 태어난 주기궤도들의 안정성 도표. 선의 형태나 부호들은 그림 1과 같으며, 보다 더 자세한 것은 본문을 참조하기 바람.

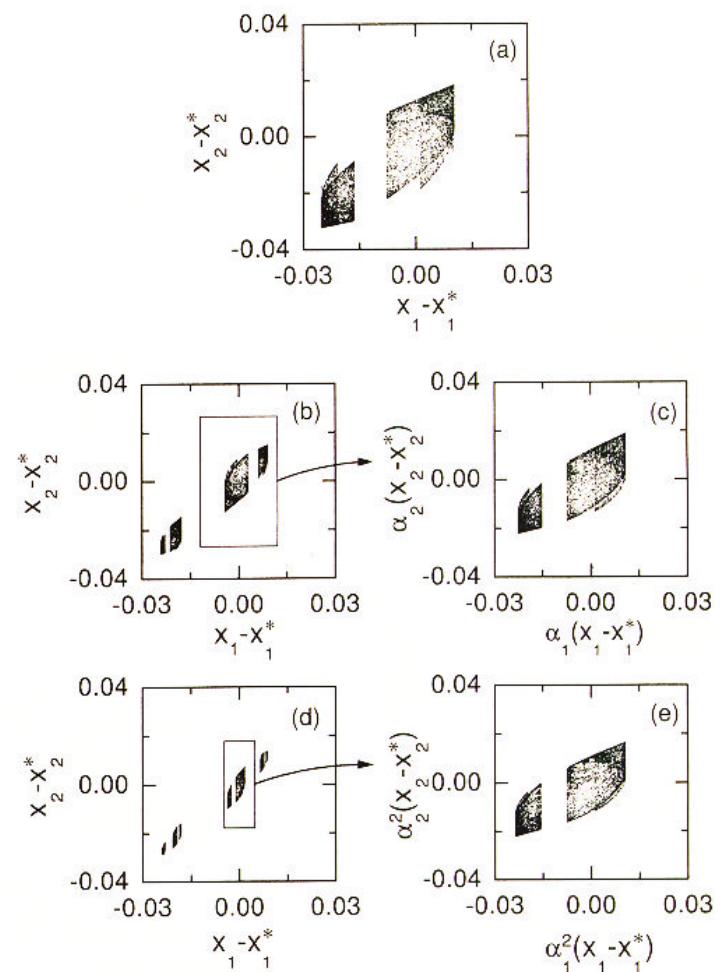


그림 3. 단방향으로 결합된 혼들이에서 쌍임계점 (A_c, B_c) 근처의 세 맷음변수 값 (A, B) 에서 $(x_1^*, x_2^*) [= (0.100 545 53, 0.100 111)]$ 을 중심으로 나타낸 초혼돈 끝개. (a)는 $(A, B) = (A_c + \Delta A, B_c + \Delta B)$ ($\Delta A = 0.00085$, $\Delta B = 0.0037$), (b)와 (c)는 $(A, B) = (A_c + \Delta A/\delta_1, B_c + \Delta B/\delta_2)$ 에서, 그리고 (d)와 (e)는 $(A, B) = (A_c + \Delta A/\delta_1^2, B_c + \Delta B/\delta_2^2)$ 에서의 초혼돈 끝개를 나타낸다. 보다 더 자세한 것은 본문을 참조하기 바람.

과 고유값 맞춤 재규격화 방법으로 써서 공부한 결과, 추상 동역학계인 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기 경우와 똑같음을 발견하였다 [6].

단방향으로 결합된 맷음변수 강제 혼들이에서의 구체적인 축척의 증거로 간단한 예를 들어 보이겠다. 그림 3은 쌍임계점 (A_c, B_c) 근처의 세 맷음변수값 (A, B) 에서 끝개들을 나타낸 것이다. 이 끝개들은 첫번째와 두번째 부분계에서의 Lyapunov 지수 σ_1 과 σ_2 가 둘다 양수인 초혼돈끝개들이다 [7]. 그림 3(a)는 $A = A_c + \Delta A$ ($\Delta A = 0.00085$), $B = B_c + \Delta B$ ($\Delta B = 0.0037$)에서 $\sigma_1 \approx 0.107$ 과 $\sigma_2 \approx 0.045$ 인 초혼돈 끝개를 $x_1 - x_2$ 평면에서 $(x_1^*, x_2^*) [= (0.100\ 545\ 53, 0.100\ 111)]$ 을 중심으로 보여주고 있다. 축척을 살펴보기 위해 먼저 ΔA 와 ΔB 를 각각 맷음변수 축척 계수 δ_1 과 δ_2 로 재축척한다. 이 재축척된 맷음변수 값 $(A, B) = (A_c + \Delta A/\delta_1, B_c + \Delta B/\delta_2)$ 에서의 끝개를 그림 3(b)가 보여주고 있다. 이 끝개도 역시 $\sigma_1 \approx 0.055$ 와 $\sigma_2 \approx 0.023$ 의 초혼돈 끝개이다. 다음에는 작은 직사각형 안의 영역을 각각 x_1 축에 대해서 α_1 , x_2 축에 대해서 α_2 의 축척 계수를 사용하여 확대하면 그림 3(c)에 있는 그림을 얻을 수 있다. 이것은 근사적으로 그림 3(a)를 재생하고 있음에 주시하자. 이러한 과정을 한 번 더 반복하면 그림 3(d)와 (e)를 얻을 수 있다. 그림 3(d)는 맷음변수 값 $(A, B) = (A_c + \Delta A/\delta_1^2, B_c + \Delta B/\delta_2^2)$ 에서 $\sigma_1 \approx 0.027$ 과 $\sigma_2 \approx 0.012$ 인 초혼돈 끝개를 보여주고 있다. 다시 작은 직사각형 안의 영역을 각각 x_1 축에 대해서 α_1^2 , x_2 축에 대해서 α_2^2 의 축척 계수로 확대하면 그림 3(e)를 얻을 수 있는데, 이는 보다 더 향상된 정확도로 그림 3(c)를 재생하고 있다.

요약하면, 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기로 이루어진 추상 모형계에서 얻어진 주기배가의 쌍임계거동에 대한 보편성을 검증하기 위해서 실제 모형계인 단방향으로 결합된 맷음변수 강제 혼들이를 공부하였다. 그 결과, 단방향으로 결합된 혼들이에서 쌍임계점 근처에서의 축척거동이 추상 모형계 경우와 똑같음을 발견하였다. 게다가, 우리는 또한 단방향으로 결합된 강제 Duffing 진동자에서도 같은 쌍임계거동이 나타남을 확인하였다 [8]. 따라서 우리는 추상 모형계에서 얻어

낸 쌍임계거동이 많은 단방향으로 결합된 실제계에서 나타나는 보편적 거동이라고 생각한다.

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단(과제번호: 1998-015-D00065), 바이오메드랩과 한국과학재단(과제번호: 1999-2-112-004-3)의 지원으로 이루어졌다.

참 고 문 현

- [1] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979).
- [2] K. Kaneko, *Phys. Lett.* **A111**, 321 (1985); I. S. Aranson, A. V. Gaponov-Grekhov and M. I. Rabinovich, *Physica* **D33**, 1 (1988); K. Kaneko, *Physica* **D68**, 299 (1993); F. H. Willeboordse and K. Kaneko, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 533 (1994); F. H. Willeboordse and K. Kaneko, *Physica* **D86**, 428 (1995); O. Rudzick and A. Pikovsky, *Phys. Rev.* **E54**, 5107 (1996).
- [3] J. H. Xiao, G. Hu and Z. Qu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4162 (1996); Y. Zhang, G. Hu and L. Gammaiton, *Phys. Rev.* **E58**, 2952 (1998); M. Hasler, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **8**, 647 (1998).
- [4] B. P. Bezruchko, V. Yu. Gulyaev, S. P. Kuznetsov and E. P. Seleznev, *Sov. Phys. Dokl.* **31**, 268 (1986); A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov and I. R. Sataev, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **1**, 839 (1991); *Physica* **D109**, 91 (1997).
- [5] S.-Y. Kim, *Phys. Rev.* **E59**, 6585 (1999).
- [6] W. Lim and S.-Y. Kim (to be published).
- [7] O. E. Rössler, *Phys. Lett.* **A71**, 155 (1979).
- [8] W. Lim and S.-Y. Kim (to be published).

Universal Scaling Behavior in Unidirectionally Coupled Systems

Woochang LIM and Sang-Yoon KIM

Department of Physics, Kangwon National University, Chunchon 200-701

(Received 11 December 1999)

We study unidirectionally coupled nonlinear oscillators to confirm the universality in the bicritical behavior of the period doublings in the abstract system consisting of two one-dimensional maps with a one-way coupling. The transition to hyperchaos occurs at the bicritical point corresponding to a border of chaos in both subsystems. We study the scaling behavior near the bicritical point by using the direct numerical method and the renormalization-group method. It is found that the second response subsystem exhibits a new type of non-Feigenbaum critical behavior while the first drive subsystem is in the Feigenbaum critical state. Note that this bicritical scaling behavior in the real system is the same as that in the abstract system. It is, thus, believed that the bicriticality in an abstract system of unidirectionally coupled one-dimensional maps may be observed in a real system consisting of two period-doubling subsystems with a one-way coupling.