

자기 진동자의 비선형 동역학

임우창* · 김상윤†

강원대학교 물리학과, 춘천 200-701

(1999년 12월 11일 받음)

주기적으로 진동하는 자기장 속에 놓인 영구자석으로 구성된 자기 진동자의 동역학적 거동을 자기장 진폭 A 를 변화시켜면서 자세하게 탐구했다. A 가 증가함에 따라, 아주 간단하게 보이는 이 자기 진동자가 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림, 주기배가 혼돈전이, 대칭회복 끌개합병 위기, 새로운 주기 끌개를 냉는 안장-마디 쌍갈림 등 매우 다양한 동역학적 거동을 보인다. 이러한 친숙한 거동 외에, 평형점들은 안정성을 잃어버리고 난 후에 다시 회복하는 부활과정을 무한히 반복하게 된다. 우리는 부활과 연관된 쌍갈림 현상을 공부해서, 부활의 얼개를 찾아냈다. 또한 무한연속 주기배가의 집적점 근처에서의 임계축척거동은 1차원 본뜨기의 경우와 같다는 것을 알았다. 따라서, 이 자기 진동자는 학생실험 등에서 시범적으로 비선형 동역학과 혼돈의 기본적인 개념들을 보여주기에 매우 적당한 표준진동자라고 생각한다.

주기적으로 진동하는 자기장 안에 있는 자기 모멘트 m 인 영구자석을 생각하자. 이러한 자기 진동자는 다음과 같이 2차 비자율 상미분방정식으로 기술되어 진다 [1-3]:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mB_0 \cos \omega t \sin \theta = 0. \quad (1)$$

여기서 θ 는 영구 자석과 자기장 사이의 각이고, I 는 회전축에 대한 관성모멘트, b 는 감쇄 계수, 그리고 B_0 와 ω 는 주기적으로 진동하는 자기장의 진폭과 진동수이다.

$\omega t \rightarrow 2\pi(t + \frac{1}{2})$ 와 $\theta \rightarrow 2\pi x$ 로 틀맞춤화하면, 다음과 같이 무차원 형태의 식을 얻을 수 있다:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} - A \cos 2\pi t \sin 2\pi x = 0. \quad (2)$$

여기에서 x 는 틀맞춤화된 각이고, $\Gamma = 2\pi b/I\omega$ 그리고 $A = 2\pi mB_0/I\omega^2$ 이다. 식 (2)는 정상파 안에 있는 입자의 운동을 기술하는 식이기도 하다 [4-6].

식 (2)의 2차 상미분 방정식은 다음과 같이 두 개의 1차 상미분 방정식으로 바꿀 수 있다:

$$\dot{x} = y, \quad (3a)$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + A \cos 2\pi t \sin 2\pi x. \quad (3b)$$

이 식은 다음의 두 변환에 대해서 불변이므로 두 가지의 대칭성을 가지게 된다:

$$S_1 : x \rightarrow x \pm \frac{1}{2}, y \rightarrow y, t \rightarrow t \pm \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$S_2 : x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, t \rightarrow t. \quad (5)$$

식 (4)와 (5)는 각각 이동변환과 반전변환이기 때문에, S_1 과

S_2 를 각각 이동 및 반전 대칭성이라고 부르기로 한다. 어떤 궤도 $z(t)[\equiv (x(t), y(t))]$ 가 $S_i(i = 1, 2)$ 에 대해서 불변이라면, 그 궤도를 S_i -대칭 궤도라고 한다. 그렇지 않은 경우에는 S_i -비대칭 궤도라고 하며, 공액 궤도 $S_i z(t)$ 가 존재하게 된다.

우리는 $\Gamma = 1.38$ 인 적당히 감쇄된 경우에 A 를 증가시켜가면서 자기 진동자에서 평형점과 회전궤도들의 동역학적 거동을 살펴보았다. 보다 자세한 내용에 대해서는 참고문헌 [7]을 참조하기 바란다.

감쇄 자기 진동자는 $\dot{z}_I = (0, 0)$ 과 $\dot{z}_{II} = (\frac{1}{2}, 0)$ 의 두 개의 평형점을 갖고 있다. 이 두 평형점은 각각 반전대칭 S_2 에 대해서는 대칭인데 반해 이동대칭 S_1 에 대해서는 비대칭이며, 서로 간에 공액이다. 그럼 1(a)는 \dot{z}_I 에서부터 시작하는 쌍갈림 도표를 보여주고 있다. (별의상, 공액 평형점인 \dot{z}_{II} 에서 시작하는 쌍갈림 도표는 생략한다.) A 값을 증가시키는데 따라, 각 평형점은 대칭보존 주기배가 쌍갈림으로 안정성을 잃어버리고, 주기 2의 S_2 -대칭 궤도가 태어난다. A 값을 더 증가시키면 주기 2의 S_2 -대칭 궤도는 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림을 하게 되고, 주기 2의 S_2 -비대칭 궤도가 태어난다. 이 주기 2의 S_2 -비대칭 궤도는 집적점 $A_{s,1}^*$ 에서 끝나는 무한연속 주기배가를 한다. 이 임계점 $A_{s,1}^*$ 근처에서의 축척거동은 1차원 본뜨기와 같다.

주기배가 혼돈전이 이후에는 S_1 과 S_2 두 대칭이 모두 깨진 네개의 작은 혼돈끌개가 나타난다. A 값을 증가시키가면 이 혼돈끌개들은 합병되어 점점 더 큰 조각들이 된다. A 가 임계값(≈ 3.9484)을 초과하면 대칭회복 끌개합병 위기(attractor-merging crisis)가 나타나서 반전대칭 S_2 가 먼저 회복된다. 그러나, A 가 더 증가하면서 두번째 임계값(≈ 3.9672)을 통과하면 다시 대칭회복 끌개합병 위기를 통해서 S_1 대칭이 회복된다. 그럼 1(b)는 $A=3.98$ 에서 S_1 과

*E-mail: wclim@mirae.kangwon.ac.kr

†E-mail: sykim@cc.kangwon.ac.kr

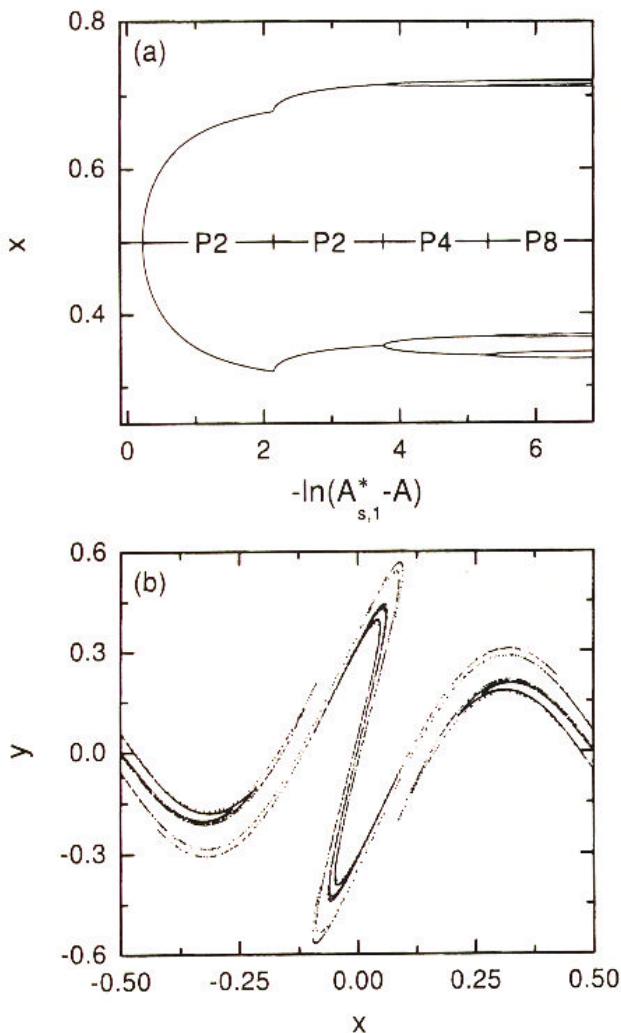


그림 1. (a) S_2 -대칭이며 S_1 -비대칭인 평형점 \hat{z}_I 에서 시작하는 쌍갈림도표. 첫번째와 두번째 $P2$ 는 S_2 -대칭과 S_2 -비대칭인 주기 2 궤도의 안정한 A 영역을 나타낸다. 그리고, 다른 PN ($N = 4, 8$)은 주기가 N 인 S_2 -비대칭 궤도의 안정한 A 영역을 나타낸다. (b) $A = 3.98$ 에서 S_1 과 S_2 대칭이 완전히 회복된 큰 혼돈끌개.

S_2 두 대칭이 모두 회복된 큰 혼돈끌개를 보여주고 있다. 이 큰 혼돈끌개는 그림 2에서 보여주는 것과 같이 $A \simeq 4.513$ 에서 사라지게 되고, 계는 $A \simeq 2.771$ 에서 안장-마디 쌍갈림으로 태어난 주기 1 궤도로 점근적으로 끌려가게 된다.

평형점과는 대조적으로 이 궤도는 S_1 -대칭이고, S_2 -비대칭이다. 이 S_1 -대칭 궤도는 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림으로 안정성을 잃어버린다. 그리고 난 후에, 대칭이 완전히 파괴된 궤도는 임계점 A_r^* ($= 12.252\ 903 \dots$)에 접속하는 무한연속 주기배가를 한다. 이 임계점 A_r^* 근처에서의 임계거동은 1차원 본뜨기와 같다. $A > A_r^*$ 에서는 대칭이 궁극적으로 파괴된 네 개의 혼돈끌개가 나타나는데, 이것들도 역시 합병되어 점점 더 큰 조각들이 된다. 평형점의 경우와는 달리 A 가 임계값 ($\simeq 12.3424$)을 통과하면서 대칭회복 끌개합병 위기를 통해서 두개의 대칭이 동시에 완전히 회복된 큰 혼돈끌개가 나타난다. (그림 2를 보시오.) 그러나, 이러한 큰 대칭 혼돈끌개는 $A \simeq 13.723$ 에서 안장-마디 쌍갈림으

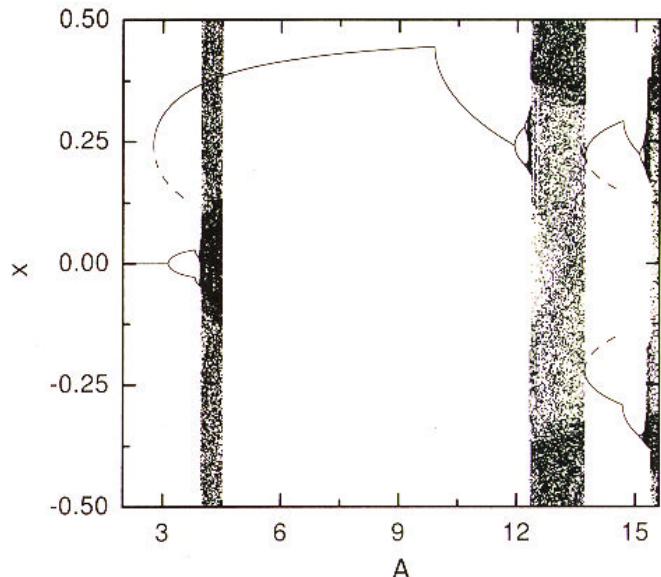


그림 2. 안장-마디 쌍갈림으로 태어난 주기 1 궤도로의 점프(jump)와 그 이후의 동역학적 거동. 자세한 것은 본문을 참조하기 바람.

로 사라진다. 그리고 난 후에 계는 점근적으로 안장-마디 쌍갈림으로 태어난 주기 2의 안정된 S_2 -대칭, S_1 -비대칭의 궤도로 끌려들어간다. 이 주기 2의 궤도도 평형점과 같이 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림, 주기배가 혼돈전이, 대칭회복 끌개합병 위기 등의 다양한 동역학적 거동을 보인다. 그러나, 평형점과 주기-1 궤도의 경우와는 달리, 평형점 \hat{z}_I 과 \hat{z}_{II} 가 벼금임계(subcritical) 주기배가 쌍갈림을 통해서 다시 안정성을 되찾는 $A = 23.751 \dots$ 에서 사라지게 된다. 이러한 평형점의 재생에 대해서는 아래에서 자세하게 기술되어진다.

두 개의 평형점 \hat{z}_I 와 \hat{z}_{II} 의 선형 안정성은 선형화된 방정식

$$\delta \ddot{x} + \Gamma \delta \dot{x} \mp 2\pi A \cos 2\pi t \delta x = 0 \quad (6)$$

으로 결정된다. 여기서 $- (+)$ 부호는 \hat{z}_I (\hat{z}_{II})의 경우에 해당한다. 이는 일반적인 감쇄된 Mathieu 방정식의 간단한 형태이다 [9]. 잘 알려져 있듯이 Mathieu 방정식에서는 진폭 A 가 증가함에 따라 안정영역과 불안정영역이 번갈아 가며 나타난다. 따라서 A 를 증가시켜 갑에 따라 평형점들은 안정성을 잃어버린 후 다시 회복하고, 다시 잃어버리는 부활의 과정을 무한히 반복하게 된다 [10].

이러한 부활과 연관된 쌍갈림을 공부한 결과 평형점들이 번갈아 가면서 벼금임계(초임계) 주기배가와 갈퀴(pitchfork) 쌍갈림으로 안정(불안정)해지는 것을 발견했다. 예로 첫번째와 두번째 부활의 경우를 살펴보자. 그림 3(a)는 평형점 \hat{z}_I 의 첫번째 부활을 보여주고 있다. 첫번째 부활이 나타나는 맷음변수값 ($= 23.751\ 799 \dots$)을 지나면 그림 2의 가장 오른쪽에 있는 큰 대칭 혼돈끌개가 사라지고 불안정한 평형점 \hat{z}_I 가 벼금임계 주기배가 쌍갈림으로 다시 안정해 진다. 다시 안정해진 평형점은 대칭파괴 갈퀴 쌍갈림으로 안정성을 잃

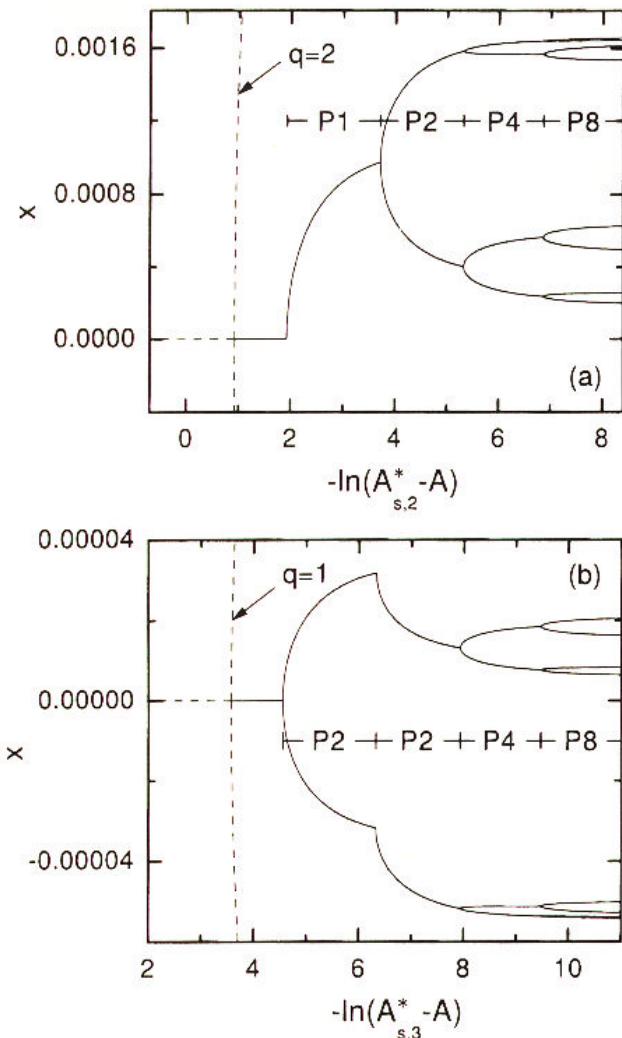


그림 3. 평형점 \hat{z}_I 의 (a) 벼금임계 주기배가 쌍갈림을 통한 첫번째 부활과 (b) 벼금임계 갈퀴 쌍갈림을 통한 두번째 부활. 여기서 실선과 대시선은 각각 안정한 궤도와 불안정한 궤도를 나타내고, q 는 궤도의 주기를 나타낸다. 자세한 것은 본문을 참조하기 바람.

어버리고, S_2 -비대칭의 주기 1 궤도가 태어난다. 이 S_2 대칭성이 깨지고 난 후에는 접점 $A_{s,2}^*$ 에서 끝나는 무한연속 주기배가를 한다. 이 두번째 임계점 $A_{s,2}^*$ 부근에서의 임계 축적거동은 첫번째 임계점 $A_{s,1}^*$ 에서의 것과 같다. 이 임계점 이후에서는 네 개의 대칭이 완전히 파괴된 작은 혼돈끌개가 나타나게 되고, 다시 대칭회복 끝개합병 위기를 통해 대칭이 회복된 큰 혼돈끌개가 나타나게 된다. 이 큰 혼돈끌개는 $A \approx 29.342$ 에서 사라지고, 계는 점근적으로 다른 안정-마디 쌍갈림으로 태어난 안정한 S_1 -대칭, S_2 -비대칭의 주기 1 궤도로 끌려간다. 이 궤도는 A 를 증가시킴에 따라 그림 2에서 보여준 회전궤도와 유사한 동역학적 거동을 보인다. 그렇게 해서, $A \approx 57.67$ 에서 대칭회복 끝개합병 위기를 통해서 큰 대칭 혼돈끌개가 나타난다. 그러나, 이 혼돈끌개도 평형점들이 두번째로 부활하는 $A = 67.076 \dots$ 에서 사라지게 된다.

그림 3(b)는 평형점 \hat{z}_I 의 두번째 부활을 보여주고 있다.

첫번째 부활과는 다르게 평형점은 벼금임계 갈퀴 쌍갈림으로 안정성을 회복한다. 부활한 이후 평형점 \hat{z}_I 의 동역학적 거동은 그림 1(a)에 나타난 평형점 \hat{z}_I 의 거동과 유사하고, 무한연속 주기배가의 임계점 $A_{s,3}^*$ 부근에서의 임계축적거동은 첫번째 임계점 $A_{s,1}^*$ 에서의 것과 같다.

요약하면, 자기 진동자의 동역학적 거동을 자기장 진폭 A 를 변화시키면서 자세하게 탐구했다. 그 결과 아주 간단하게 보이는 이 자기 진동자가 여러가지 쌍갈림, 혼돈, 위기, 부활 등 매우 다양한 동역학적 거동을 보임을 발견했다. 따라서 이 자기 진동자는 비선형동역학과 혼돈의 기본적인 개념들을 시범적으로 보여주기에 매우 적당한 표준 예라고 생각한다. 게다가, 학생실험에 적합한 자기 진동자의 실험장치가 값싸고 쉽게 만들 수 있다. 따라서, 우리의 일이 이러한 기본적인 실험에 매우 유용하고 구체적인 정보를 제공한다고 생각한다.

감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단(과제번호: 1998-015-D00065), 바이오메드랩과 한국과학재단(과제번호: 1999-2-112-004-3)의 지원으로 이루어졌다.

참 고 문 헌

- [1] V. Croquette and C. Poitou, *J. Phys. Lett.* **42**, 537 (1981).
- [2] H. Meissner and G. Schmidt, *Am. J. Phys.* **54**, 800 (1986).
- [3] K. Briggs, *Am. J. Phys.* **55**, 1083 (1987).
- [4] J. Bialek, G. Schmidt and B. H. Wang, *Physica D* **14**, 265 (1985).
- [5] G. Schmidt, *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion* **7**, 87 (1982).
- [6] D. F. Escande and F. Doveil, *Phys. Lett.* **A83**, 307 (1981); *J. Stat. Phys.* **26**, 257 (1981).
- [7] S.-Y. Kim, *J. Phys.* **A32**, 6727 (1999).
- [8] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras and J. A. Yorke, *Phys. Rev.* **A36**, 5365 (1987).
- [9] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGrawHill, New York, 1953), Sec. 5.2; J. Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics* (Benjamin, New York, 1965), Sec. 7.5.
- [10] S.-Y. Kim and K. Lee, *Phys. Rev.* **E53**, 1579 (1996).

Nonlinear Dynamics of a Magnetic Oscillator

Woochang LIM and Sang-Yoon KIM

Department of Physics, Kangwon National University, Chunchon 200-701

(Received 11 December 1999)

We study a damped magnetic oscillator, consisting of a permanent magnet in a periodically oscillating magnetic field. A detailed investigation of the dynamics of this dissipative magnetic system is made by varying the field amplitude A . As A is increased, the damped magnetic oscillator, albeit simple looking, exhibits rich dynamical behaviors, such as symmetry-breaking pitchfork bifurcations, period-doubling transitions to chaos, symmetry-restoring attractor-merging crises, and saddle-node bifurcations giving rise to new periodic attractors. Besides these familiar behaviors, a cascade of “resurrections” of the stationary points also occurs. We make a investigation of the bifurcations associated with such resurrections and find their mechanism. It is also found that the critical behavior in the period-doubling cascades is the same as those in the one-dimensional map. Consequently, we think that this magnetic oscillator may serve as a standard example to illustrate the basic ideas of nonlinear dynamics and chaos.