

## 두 우물 더핑 진동자에서의 불안정 궤도의 안정화

이상열 · 김영태

아주대학교 물리학과, 수원 442-749

김 상 윤

강원대학교 물리학과, 춘천 200-701

(1999년 12월 11일 받음)

두 우물 더핑 진동자 (double-well Duffing oscillator)는 한 개의 불안정 평형점과 두 개의 안정 평형점을 가진다. 디지털 및 아날로그 시뮬을 사용하여 불안정 평형점으로부터 생겨난 불안정궤도가 안정화되는 기구(mechanism)를 조사하였다. 구동신호의 진동수  $\omega$ 와 크기  $F$ 로 구성되는 공간에서의 상도표(phase diagram)와 궤도를 조사하여 불안정궤도가 subcritical pitchfork 쌍갈림을 통하여 안정 주기궤도를 흡수하면서 안정화됨을 확인하였다. 이러한 동적 안정화는 불안정 궤도를 안정화시키는 비선형 동역학계의 보편적인 성질임을 보였다.

### I. 서 론

더핑 진동자는 대표적인 비선형 동역학계로, 물리나 공학 혹은 생물학적 시스템의 모델로 흔히 사용된다. 1918년 독일의 전기공학자 Duffing [1]에 의해 처음 소개되었으며 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + ax + bx^3 = f(t) \quad (1)$$

여기서 감쇠상수  $\gamma > 0$  이고, 외력은 주기  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 를 갖고  $f(t) = F \sin(\omega t)$  꼴로 표시된다. 식 (1)은 계수의 형태에 따라 크게 3가지의 포텐셜 우물형태로 구분된다.

1.  $a < 0, b > 0$  : 두 우물 (double-well) 포텐셜. ( $x = \pm\sqrt{a/b}$  : 안정 평형점,  $x=0$  : 불안정 평형점)
2.  $a > 0, b > 0$  : 한 우물 (single-well) 포텐셜. ( $x=0$  : 안정 평형점)
3.  $a > 0, b < 0$  : Double-hump 포텐셜. ( $x = \pm\sqrt{a/b}$  : 불안정 평형점,  $x=0$  : 안정 평형점)

본 논문에서는 두 우물 포텐셜을 가진 더핑 진동자( $a < 0, b > 0$ )의 동적인 특성에 대해 연구하였다. 두우물 더핑 진동자는 이미 buckled beam이나 플라즈마 진동자의 수학적 모델에 사용되었고 [2,3], 다양한 흥미로운 동역학적 특징을 보인다고 알려져 있다. 그 예로 많은 공명(resonance)영역이 존재하고, 같은 조절 상수 ( $\gamma, a, b$ )에서 여러 끌개(attractor)가 공존하며, Feigenbaum 경로를 따른 혼돈과 crisis 및 hopping 현상 등을 보인다 [4]. 그럼에도 불구하고  $\omega$ 와  $F$ 가 큰

영역에서의 두 우물 더핑 진동자의 특성에 대하여는 별로 알려진 것이 없다. 이 논문에서는 컴퓨터를 이용한 수치 계산 및 아날로그 회로 시뮬레이션을 통하여 이 영역에서의 불안정 평형점에서 생긴 불안정 주기궤도의 안정화 기구를 조사하였다.

### II. 본 론

더핑 진동자의 운동방정식을 만족하는 회로를 구현하기 위해 그림 1에 보인 아날로그 회로를 제작하였다. 이 회로는 Op amplifier( $\mu A741$ )를 이용한 적분기와 곱셈기(Multiplier, MPY100)를 이용하여 구현하였다 [5]. 이 회로의 구동신호로는 파형발생기(HP3325)의 sine 파형을 이용하였다.

이 회로의 회로방정식은 두 적분기의 출력을  $v_1, v_2$ 라고 했을 때

$$-C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{f(t)}{R_1} - 0.1 \frac{p_3 v_2^3}{R_2} + \frac{p_2 v_2}{R_3} + \frac{p_1 v_1}{R_4} \quad (2)$$

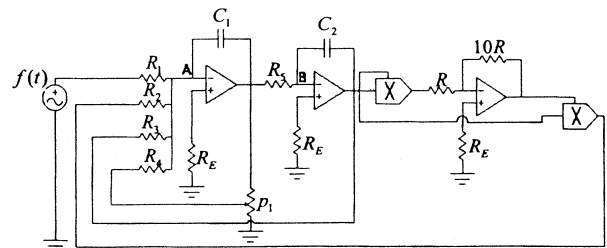


그림 1. 두 우물 더핑 진동자의 아날로그 구현회로.

$$-C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1}{R_5} \quad (3)$$

으로 표시되고  $v_1$ 를 소거하면

$$C_1 C_2 R_4 R_5 \frac{d^2 v_2}{dt^2} = \frac{R_4 f(t)}{R_1} - 0.1 \frac{R_4 p_3 v_2^3}{R_2} - p_1 R_5 C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{p_2 R_4 v_2}{R_3} \quad (4)$$

를 얻게 된다. 여기서  $f(t) = f_0 \sin(\omega't)$ 이다. 식 (4)를  $\tau = (R_1 C_1)^{-1}t$ ,  $v_2 = x$ 로 치환하면

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \gamma \frac{dx}{d\tau} + ax + bx^3 = F \sin(\omega\tau) \quad (5)$$

가 되고 이때  $\gamma = \frac{R_1 p_1}{R_4}$ ,  $a = -\frac{C_1 R_1^2 p_2}{C_2 R_2 R_3}$ ,  $b = 0.1 \frac{C_1 R_1^2}{C_2 R_2 R_3} p_3$ ,  $F = \frac{C_1 R_1}{C_2 R_5} f_0$ ,  $\omega = R_1 C_1 \omega'$ 가 된다. 회로 상수를  $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 0.01 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $p_1=0.1$ ,  $p_2=1.0$ ,  $p_3=1.0$ 로 잡아  $\gamma=0.1$ ,  $a=-1$ ,  $b=1$ ,  $F=f_0$ 가 되게 조절하였다. 동일한 더핑 진동자 상수 ( $\gamma=0.1$ ,  $a=-1$ ,  $b=1$ )에 대하여 수치계산은 통상적인 미분 방정식의 수치해석 방법을 이용하였다.

더핑 진동자는 다른 비선형 진동자와 마찬가지로 진동자의 운동이 초기값에 의하여 결정된다. 따라서 이 초기값들의 집합은 각 끌개의 basin of attraction을 이룬다 [6]. 그림 2는 주어진 상수값 ( $F, \omega$ )에서 초기값의 변화에 따른 끌개의 모양을 보여주고 있다. 이것으로서 한 조절상수에서 다양한 서로 다른 끌개가 공존함을 확인하였다.

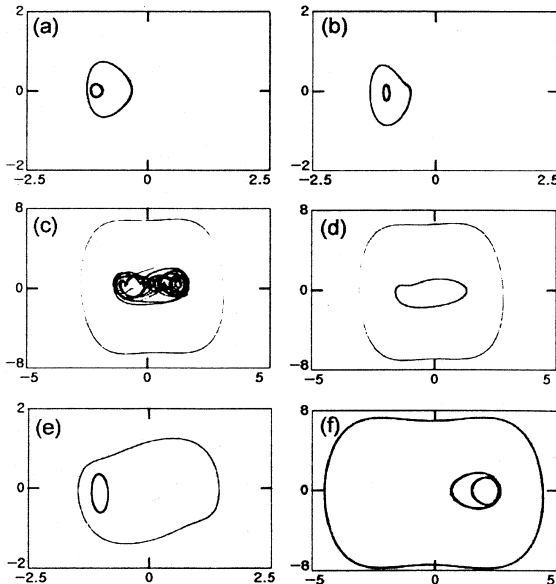


그림 2. 동일한 ( $F, \omega$ )에서의 더핑 진동자 끌개의 공존. (a)  $\omega=1.2, F=0.1$ , (b)  $\omega=2.5, F=0.3$ , (c)  $\omega=2.5, F=0.1$ , (d)  $\omega=2.5, F=1.18$ , (e)  $\omega=2.5, F=0.8$ , (f)  $\omega=1.7, F=0.57$ .

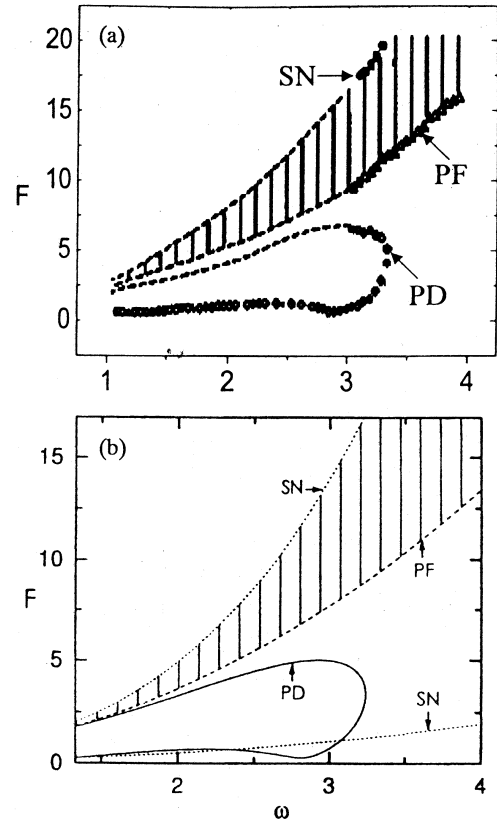


그림 3. 두 우물 더핑 진동자의 상전이도. (a) 회로실험. (b) 수치해석. (a)에서 점선은 예상되는 쌍갈림 곡선을 표시한 것이다.

각 끌개의 쌍갈림(bifurcation)을 관찰하기 위해 입력신호와 동일한 주기로 샘플링하는 회로를 사용하였다. 더핑 진동자의 공명 주파수 영역 ( $\omega \sim 1, F < 1$ )에서 이미 잘 알려진 공명뿔(resonance horn) 구조가 관찰되었다. 반면 본 논문의 연구대상인  $\omega > 3.0$  이상인 영역에서는 비교적 단순한 동적 운동을 보였다. 컴퓨터 수치해석 및 회로 실험으로 조사한 조절상수  $\omega$ 와  $F$  값에 따른 상전이도를 그림 3에 나타내었다.

그림 3을 보면  $F$ 를 증가시킴에 따라  $\omega > 3.0$ 에서 불안정 궤도가 안정화되는 과정이 다음 2가지 경우가 됨을 알 수 있다.

1.  $\omega \geq 3.3$

두 개의 안정 평형점에서 출발한 공존하는 안정 주기궤도는 그림 4(a)와 4(b)에서와 같이 궤적의 크기가 커지다가,  $F$ 가 그림 3의 pitchfork(PF) 쌍갈림 곡선을 통과할 때 그림 4(c)와 같이 서로 일치하게 된다. 동시에 이들 안정 주기궤도는 안정성을 잃고 불안정해진다. 반면 불안정 평형점에서

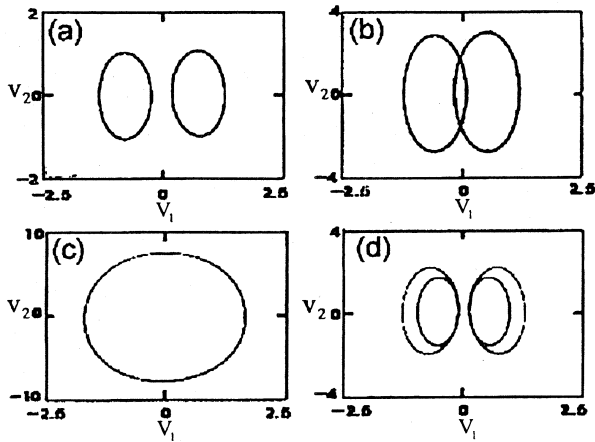


그림 4. 두 우물 더핑 진동자의 궤도. (a)  $\omega=3.4, F=7.1$ , (b)  $\omega=3.4, F=8.0$ , (c)  $\omega=3.4, F=15.2$ , (d)  $\omega=3.2, F=5.38$ .

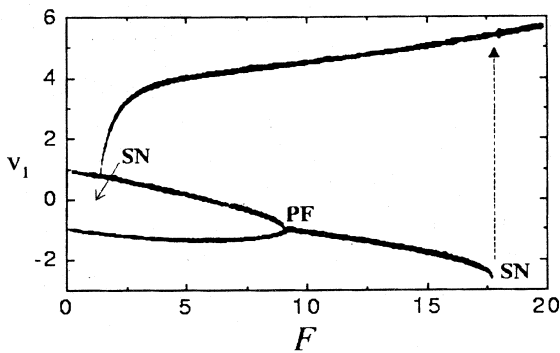


그림 5. 두 우물 더핑 진동자의 쌍갈림 곡선 ( $\omega=3.3$ ).

시작한 불안정 주기궤도 역시 궤적의 크기가 점차 증가하여 pitchfork 쌍갈림 곡선에서 안정 주기궤도와 일치하고, 대신 안정성을 얻게 된다. 다시 말해서 pitchfork 쌍갈림을 통해 불안정 평형점 (0,0)에서 생겨난 불안정 주기궤도는 안정 평형점에서 생겨난 안정 주기궤도를 흡수하면서 안정 주기궤도로 변화된다.

이를 좀더 자세히 알아보기 위하여  $F$ 를 증가시켜가며 주기궤도의 포앵카레 단면을 실험적으로 측정하여 그림 5이다. 그림 5는 전형적인 supercritical pitchfork bifurcation이 일어남을 보여주고 있다. 그림 5의 쌍갈림 곡선을 보면 공존하는 두 개의 안정 주기궤도가 만나 불안정해지고 대신 새로운 주기궤도를 안정화시키는 것을 알 수 있다.

### 2. $3.1 \leq \omega < 3.3$

이 경우 안정 평형점에서 출발한 주기궤도는 우선 그림 4(d)에서와 같이 주기배증을 한 후, 역주기배증 쌍갈림을 통

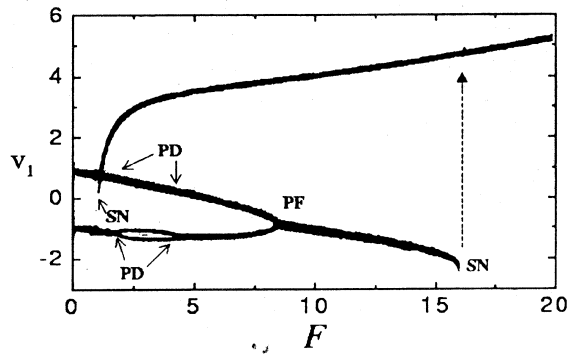


그림 6. 두 우물 더핑 진동자의 쌍갈림 곡선 ( $\omega=3.2$ ).

해 주기 1인 궤도로 바뀌게 된다. 이후  $F$ 가 증가하면  $\omega \geq 3.3$ 인 경우와 동일하게 pitchfork 쌍갈림을 통하여 불안정 평형점에서 생겨난 불안정 주기궤도가 안정화된다.

동적 안정화 기구를 통하여 안정화된 불안정 주기궤도는  $F$ 를 더 증가시킬 경우 saddle-node(SN) 쌍갈림을 통하여 다시 불안정해지고, 대신 두 안정 평형점을 포함하는 대칭적인 큰 궤도(large orbit)가 생겨나게 된다. 그림 6의 쌍갈림 곡선은  $F$ 가 클 경우 PF 쌍갈림을 통하여 안정화된 주기궤도가 다시 SN 쌍갈림을 통하여  $F \sim 16$ 에서 큰 궤도로 변화되는 것을 보여주고 있다. 이때 주기궤도의 포앵카레 단면값이 갑자기 증가하는 현상이 일어난다.  $F$ 가 매우 클 때 나타나는 큰 궤도의 운동은 한 우물 더핑 진동자의 주기궤도 운동과 일치한다. 따라서  $F$ 가 충분히 클 경우 두 우물 포텐셜의 불안정 평형점 (0,0)의 영향이 무시되어 두 우물 더핑 진동자가 한 우물 더핑 진동자와 동일한 운동을 보이는 것으로 해석할 수 있다.

또한 large orbit이 생긴 후  $F$ 를 감소시키면  $F$ 를 증가시켰을 때 보였던 쌍갈림 과정을 따르지 않고 매우 작은  $F$ 에서 또 다른 SN 쌍갈림을 통하여 안정 주기궤도로 변화하는 hysteresis 현상을 관찰할 수 있다. 그림 6은  $F$ 를 증가시켰을 경우와 감소시켰을 경우 큰 궤도의 변화가 다른  $F$ 값에서 일어나는 것을 잘 보여주고 있다.

## III. 결 론

두 우물 더핑 진동자에 대한 컴퓨터 수치해석과 아날로그 회로 실험을 통해 구동신호의 진폭이 증가함에 따라 pitchfork 쌍갈림을 통해 불안정 평형점에서 출발한 불안정 궤도가 안정 주기궤도를 흡수하면서 안정화됨을 확인하였다. 이러한 불안정 주기궤도의 동적 안정화는 안정 평형점과 불안정 평형점이 같이 존재하는 비선형계를 외부에서 강제 주기신호를 가하여 구동시킬 경우 나타날 수 있는 보편적인 현상으로 볼 수 있고 이미 반전(inverted) 강제구동 단진자에서

확인된 바 있다 [7].

감사의 글

본 연구는 학술진흥재단 과학기술 기초 중점연구비(기초 과학 연구소 지원) (과제번호 1998-015-D00060) 지원을 받아 수행한 것입니다.

참 고 문 헌

[1] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigen Figen Frequenz und ihre Tech-*

*nische Bedeutung* (Vieweg, Braunschweig, 1918).  
 [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983).  
 [3] F. C. Moon and P. J. Holmes, *Journal of Sound and Vibration* **65**, 275 (1979).  
 [4] C. S. Wang, Y. H. Kao, J. C. Huang and Y. S. Gou, *Phys. Rev. A* **45**, 3471 (1992).  
 [5] M. Lakshmanan and K. Murali, *Chaos in Nonlinear Oscillators* (World Scientific, Singapore, 1996).  
 [6] F. C. Moon and G. X. Li, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1439 (1985).  
 [7] S. -Y. Kim and B. Hu, *Phys. Rev. E* **58**, 3028 (1998).

Stabilization of an Unstable Orbit in a Double-Well Duffing Oscillator

Sang Yeol LEE and Youngtae KIM  
Department of Physics, Ajou University, Suwon 442-749

Sang-Yoon KIM  
Department of Physics, Kangwon National University, Chunchon 200-701

(Received 11 December 1999)

A double-well Duffing oscillator has one unstable equilibrium point and two stable equilibrium points. Using a numerical and analog simulation, we investigated the stabilization mechanism of an unstable orbit arising from the unstable equilibrium point of the potential. It was confirmed by a study of the phase diagram in a space consisting of the frequency  $\omega$  and the amplitude  $F$  of the driving force that the unstable periodic orbit was stabilized by absorbing stable periodic orbits through subcritical pitchfork bifurcations. It is suggested that this dynamic stabilization of the unstable orbit may be a generic property of nonlinear dynamical systems.