

## 수평으로 구동된 흔들이에서의 쌍갈림

정재용 · 이은미

수평으로 구동된 흔들이에서 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기 1 대칭 궤도의 쌍갈림을 맷음면 수  $A$ (규격화된 외부 구동력의 진폭)와  $\Omega$ (규격화된 외부 구동력의 진동수)를 변화시켜가며 공부했다. 그러한 주기 1 대칭 궤도는  $A$ 를 증가시켰을 때 어떤 문턱값에서  $\Omega$ 에 따라 갈퀴 쌍갈림을 통해서 안정성을 잃어버리거나 안장마다 쌍갈림을 통해서 사라지게 된다. 또한 주기 1 대칭 궤도의 쌍갈림 곡선은 그것의 감음수에 의해 특성화된다. 감음수가 짝수이면 갈퀴 쌍갈림 곡선이고 홀수이면 안장마다 쌍갈림 곡선이다. 그리고 맷음면수 평면에서 주기 1 궤도의 쌍갈림 곡선은 반복되는 기본구조를 갖는다.

### I. 서론

흔들이의 고정점에 그림 1과 같이 수평의 외부 구동력을 가했을 때 흔들이의 동역학적 거동을 매개변수  $\Omega$ 와  $A$ 를 변화시켜가면서 공부했다[1]. 이 계의 운동 방정식은 다음과 같다:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mglsin\theta = ml\omega^2\varepsilon \cos\omega t. \quad (1)$$

여기서  $m$ 은 막대에 매달린 물체의 질량이고,  $l$ 은 질량을 무시할 수 있는 막대의 길이이고,  $b$ 는 감쇠계수이고,  $\varepsilon$ 은 외부 구동력의 진폭이고,  $\omega$ 는 외부 구동력의 진동수이다. 식(1)에서  $\theta \rightarrow 2\pi x$ ,  $t \rightarrow 2\pi t$ 로 치환하면, 다음과 같이 규격화된 식을 얻을 수 있다:

$$\ddot{x} + 2\pi\beta\Omega x + 2\pi\Omega^2 \sin 2\pi x = 2\pi A \cos 2\pi t \cos 2\pi x. \quad (2)$$

여기서 자연 진동수  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ 이고, 규격화된 감쇠계수  $\beta = b/ml^2\omega_0$ 이고, 규격화된 외부 구동력의 진동수  $\Omega = \omega_0/\omega$ 이고, 규격화된 외부 구동력의 진폭  $A = \varepsilon/l$ 이다.

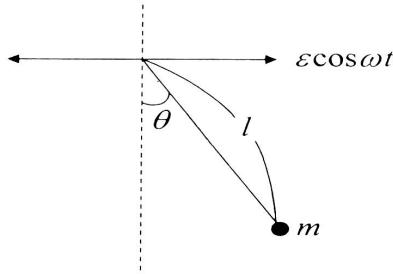


그림 1. 수평으로 구동된 흔들이

이 계에서  $\beta$ 를 0.5로 고정시키고 진동수  $\Omega$ 와 진폭  $A$ 를 변화시켜가면서 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의 쌍갈림을 공

부한다. 그러한 주기-1 대칭 궤도는  $A$ 를 증가시켰을 때 어떤 문턱값에서  $\Omega$ 에 따라 갈퀴 쌍갈림을 통해서 안정성을 잃어버리거나 안장마다 쌍갈림을 통해서 사라지게 된다. 또한 주기-1 대칭 궤도의 쌍갈림 곡선은 그것의 감음수에 의해 특성화된다. 그리고 매개변수 평면에서 주기-1 궤도의 쌍갈림 곡선은 반복되는 기본구조를 갖는다.

### II. 푸앵카레 본뜨기에서 주기궤도의 안정성, 쌍갈림 및 감음수

이 절에서는 수평으로 구동된 흔들이의 푸앵카레 본뜨기에서 주기궤도의 안정성에 연관된 쌍갈림들과 감음수를 논한다.

2차 상미분 방정식 (2)는 다음과 같은 두개의 1차 상미분 방정식으로 표현할 수 있다:

$$\dot{x} = y, \quad (3a)$$

$$\dot{y} = -2\pi\beta\Omega y - 2\pi\Omega^2 \sin 2\pi x + 2\pi A \cos 2\pi t \cos 2\pi x. \quad (3b)$$

이 방정식들은 다음과 같은 대칭  $S$ 를 갖는다:

$$S: x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, t \rightarrow t + \frac{1}{2}.$$

여기서 궤도  $z(t)[\equiv(x(t), y(t))]$ 가  $S$ 에 대해 불변하면 대칭궤도라 부른다. 그렇지 않은 경우에는 비대칭 궤도라 부르고, 이 경우에는 공액궤도가 존재한다.

주기  $q$ 인 궤도 ( $P^q(z_0) = z_0$ ,  $P^j(z_0) \neq z_0$ ,  $1 \leq j \leq q-1$ )의 안정성에 대해 분석해 보자. 여기서  $P^k$ 는  $k$ 번 푸앵카레 본뜨기한 것을 의미한다. 주기궤도의 선형안정성은  $P^q$ 를 궤도점  $z_0$ 에 대해 선형화한 행렬  $DP^q(z_0)$ 에 의해서 결정된다. 행렬  $M(\equiv DP^q)$ 는 플로케 이론을 적용해서 미소집동에 관한 선형화된 방정식을 한 주기동안 적분하면 구할 수 있다[2].

행렬  $M$ 의 고유값들  $(\lambda_1, \lambda_2)$ 을 안정성 충수라 부르

며, 이 안정성 승수들을 통해 안정성을 분석할 수 있다. 상수 Jacobian 행렬식 값을 갖는 2차원 흘러지기 본뜨기에서 주기궤도의 안정성을 분석하기 위해서 다음과 같이 정의된 좀더 광범위한 실수양  $R$ 이 도입되었다[3].

$$R \equiv \frac{1 + \det M - \text{tr} M}{2(1 + \det M)} \quad (4)$$

여기서  $R$ 은 residue라고 부르고  $\text{tr} M$ 과  $\det M$ 은  $M$ 의 케사(trace)과 행렬식(determinant)이다.

$R$ 이 0에서 1사이에서 주기궤도는 안정하고,  $R$ 이 0과 1을 통과해 가면 쌍갈림이 일어나면서 주기궤도는 불안정해진다[4].

푸앵카레 본뜨기 P에서 궤도의 감음수(winding number)에 대해 알아보기 위해 우선 방정식(3)을 선형화하고 그것을 극좌표계  $(r, \phi)$ 로 바꾸어 표현할 수 있다. 벡터  $(r, \phi)$ 의 운동은 근처 궤도의 정보를 모두 포함하고 있고, 이산시간  $t = m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )에서 초기 벡터  $(r_0, \phi_0)$ 의 푸앵카레 본뜨기  $(r_m, \phi_m)$ 를 얻을 수 있다. 푸앵카레 본뜨기 P에서 근처 궤도들의 단위 시간당 평균 회전수는 다음 식으로 구할 수 있다:

$$\omega \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\phi_m - \phi_0|}{2\pi m} \quad (5)$$

이것을 궤도  $\{z_m\}$ 의 감음수라 한다[5].

### III. 주기-1 궤도의 쌍갈림

이 장에서는 수평으로 구동된 진자에서  $\beta$ 를 0.5로 고정시키고, 맷음변수  $\Omega$ 와  $A$ 를 변화시키면서 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭궤도의 안정성에 관계된 쌍갈림을 공부하고자 한다.

그러한 주기-1 대칭 궤도는  $A$ 를 0에서부터 증가시켜가면서 쌍갈림점에서  $\Omega$ 에 따라 갈퀴 쌍갈림을 통해서 불안정해지거나, 안장마디 쌍갈림을 통해서 사라지게 된다.

맷음변수  $A - \Omega$  평면에서의 안정성도표인 그림 2에서 보여지는 것과 같이 갈퀴 쌍갈림이 일어나는 쌍갈림점들을 연결하면 갈퀴 쌍갈림 곡선을 얻을 수 있고, 안장마디 쌍갈림이 일어나는 쌍갈림점들을 연결하면 안장마디 쌍갈림 곡선을 얻을 수 있다.

그림 2에서 굵은 실선은 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의 쌍갈림 곡선  $B_n$ 을 나타낸다. 여기서  $n$ 은 쌍갈림 곡선에서 주기-1 궤도의 감음수다. 쌍갈림 곡선의 감음수에 따라 쌍갈림 곡선  $B_n$ 을 특성화시킬 수 있는데, 감음수가 짝수 일 때는 갈퀴 쌍갈림이 일어나게 되고, 감음수가 홀수 일 때는 안장마디 쌍갈림이 일어나게 된다. 감음수가 짝수인 쌍갈림 곡선  $B_n$ 에 연결된 점선은 안장마디

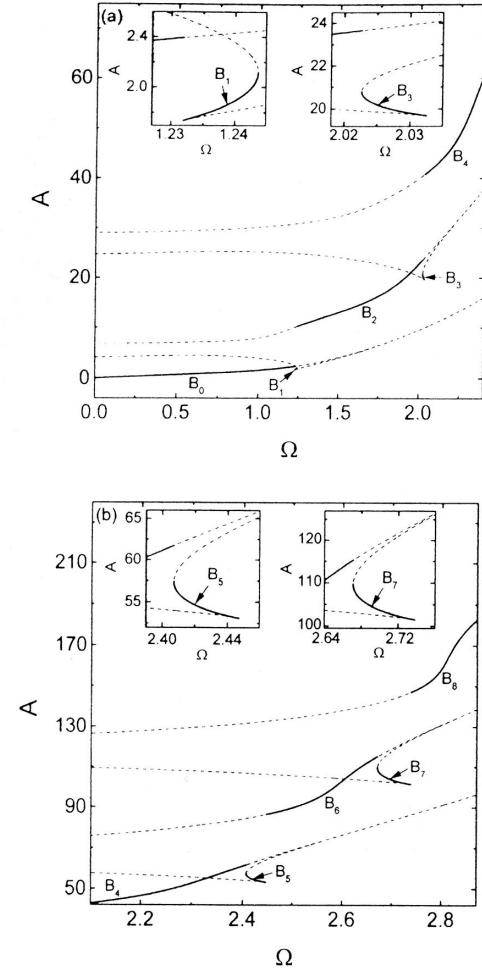


그림 2. 주기-1 궤도의 안정성 도표.

여기서 굵은 실선  $B_n$ 은 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의 쌍갈림 곡선을 나타낸다. 이때  $n$ 은 쌍갈림 곡선에서 주기-1 궤도의 감음수이다.  $n$ 이 짝수이면  $B_n$ 은 갈퀴 쌍갈림 곡선을 나타내고,  $n$ 이 홀수이면  $B_n$ 은 안장마디 쌍갈림 곡선을 나타낸다.  $n$ 이 짝수인  $B_n$ 에 연결된 점선은 안장마디 쌍갈림으로부터 태어난 주기-1 궤도가 갈퀴 쌍갈림하는 쌍갈림 곡선을 나타내고,  $n$ 이 홀수인  $B_n$ 에 연결된 점선은 안장마디 쌍갈림으로 주기-1 궤도가 태어나는 쌍갈림 곡선을 나타낸다.

홀수 일 때는 안장마디 쌍갈림이 일어나게 된다. 감음수가 짝수인 쌍갈림 곡선  $B_n$ 에 연결된 점선은 안장마디

쌍갈림으로부터 태어난 주기-1 궤도가 갈퀴 쌍갈림하는 쌍갈림 꼭선  $b_n$ 을 나타내고, 감음수가 홀수인 쌍갈림 꼭선  $B_n$ 에 연결된 점선은 안장마디 쌍갈림으로 주기-1 궤도가 태어나는 쌍갈림 꼭선  $b_n$ 을 나타낸다. 이와 같이  $B_n$ 의 양쪽같은  $b_n$ 으로 연결되어 하나의 꼭선  $L_n$ 을 이룬다.  $L_2$ 와  $L_3$ 가 만드는 쌍갈림 꼭선의 구조는  $L_4$ 와  $L_5$ ,  $L_6$ 와  $L_7$ 에서도 나타나며, 이와 같은 쌍갈림 꼭선의 기본 구조는  $\Omega$ 를 더 증가시켜가도 반복되어 나타날 것으로 예상된다.

이제 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도가 갈퀴 쌍갈림하는 것을  $\Omega=1.0$ 인 경우를 예로 살펴보자.  $A$ 를 0에서부터 증가시켜가면, 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 주기-1 대칭 궤도가

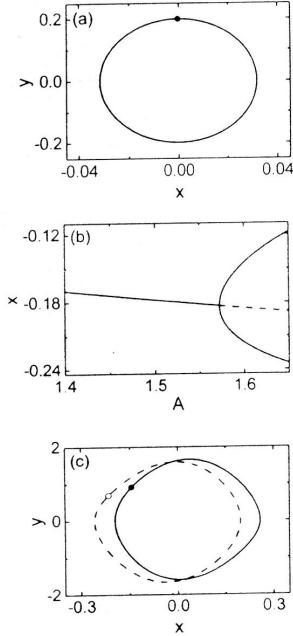


그림 3.  $\Omega=1.0$ 에서 (a) 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의  $A=0.1$ 에서 위상초상, (b) 초임계 갈퀴 쌍갈림점 근처에서 쌍갈림 도표, (c) 갈퀴 쌍갈림이 일어나면서 태어난 한 쌍의 비대칭 궤도의  $A=1.6$ 에서 위상초상 태어난다(그림 3(a)).  $A$ 를 더 증가시켜가면 어떤 문턱값( $A=1.572\,491\cdots$ )을 통과해가면서 불안정해지고 쌍갈림점에서 한 쌍의 비대칭궤도(그림 3(c))가 태어난다.

나는 갈퀴 쌍갈림이 일어나게 된다(그림 3(b)).

그림 4의 첫번째 열을 보자. 갈퀴 쌍갈림점에서 감음수가 각각 0, 2, 4, 6, 8을 가지고 있음에 주의하며 두번째 열을 보면 감음수가 증가할수록 더 많이 궤도가 감기는 것을 알 수 있다.

이번에는 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도가 안장마디 쌍갈림하는 것을  $\Omega=1.24$ 인 경우를 예로 살펴보자.  $A$ 를 0에서부터 증가시키면 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도가 어떤 문턱값( $A=1.893\,191\cdots$ )에서 안장마디 쌍갈림으로 사라지게 된다(그림 5(a)).

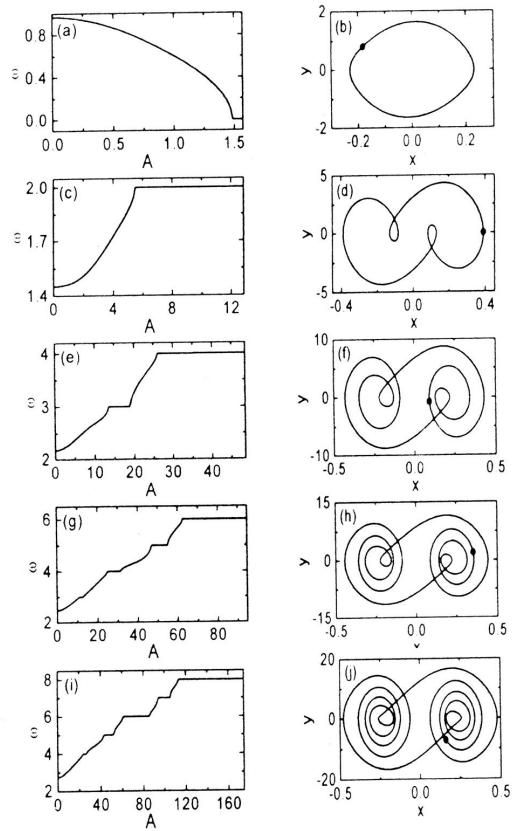


그림 4. (a)와 (b)는  $\Omega=1.0$ , (c)와 (d)는  $\Omega=1.5$ , (e)와 (f)는  $\Omega=2.25$ , (g)와 (h)는  $\Omega=2.56$ , (i)와 (j)는  $\Omega=2.86$ 일 때의  $\omega$ (감은수) vs.  $A$  ( $0 \leq A \leq$  쌍갈림점)의 그림과 외부 구동력이 없을 때의 평형점에서 태어난 주기-1 궤도의 쌍갈림점에서 위상초상

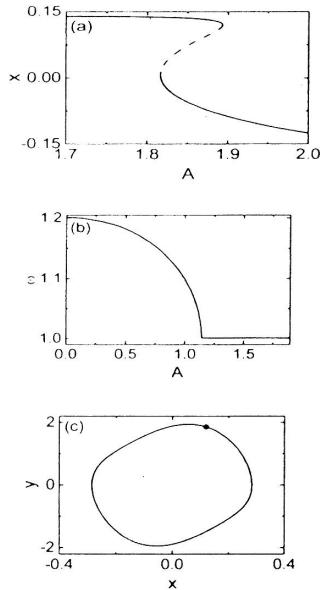


그림 5.  $\Omega = 1.24$ 에서 (a) 안장마디 쌍갈림점 근처에 서의 쌍갈림 도표, (b)  $\omega$ (감음수) vs.  $A$  ( $0 \leq A \leq$  쌍갈림점), (c) 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의 안장마디 쌍갈림점에서 위상초상

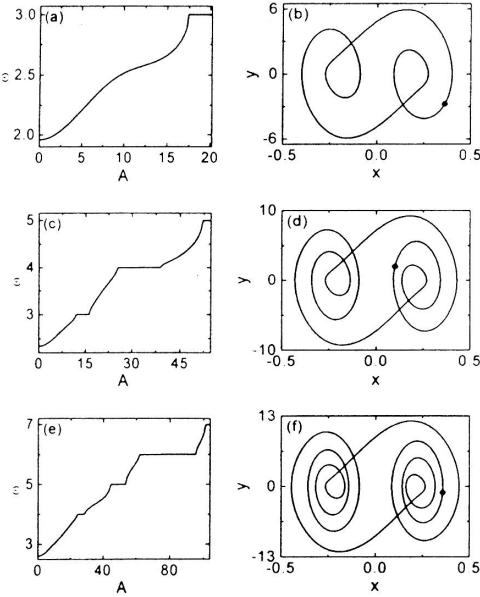


그림 6. (a)와 (b)는  $\Omega = 2.025$ , (c)와 (d)는

$\Omega = 2.42$ , (e)와 (f)는  $\Omega = 2.70$ 일 때의  $\omega$ (감음수) vs.  $A$  ( $0 \leq A \leq$  쌍갈림점)의 그림과 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의 안장마디 쌍갈림점에서 위상초상.

그림 6의 첫번째 열을 보자. 안장마디 쌍갈림점에서 감음수가 각각 3, 5, 7을 가지고 있음에 주의하며, 그림 6의 두번째 열을 살펴보면 감음수가 증가할수록 더 많이 궤도가 감기는 것을 알 수 있다.

#### IV. 요약

수평으로 구동된 흔들이에서 맷음변수  $A$ 와  $\Omega$ 를 변화시켜가며 외부 구동력이 없을 때의 평형점으로부터 태어난 주기-1 대칭 궤도의 쌍갈림을 공부했다. 그러한 주기-1 대칭 궤도는  $A$ 를 증가시켜가면 어떤 문턱값에서  $\Omega$ 에 따라 갈퀴 쌍갈림을 통해서 안정성을 잃어버리거나 안장마디 쌍갈림을 통해서 사라지게 된다. 또한 주기-1 대칭 궤도의 쌍갈림 곡선은 그것의 감음수에 의해 특성화된다. 감음수가 짹수이면 갈퀴 쌍갈림 곡선이고, 홀수이면 안장마디 쌍갈림 곡선이다. 그리고 맷음변수 평면에서 주기-1 궤도의 쌍갈림 곡선은 반복되는 기본구조를 갖는다.

#### V. 참고문헌

- [1] F. C. Moon, J. Cusumano and P. J. Holmes, *Physica D* **24**, 383 (1987).
- [2] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory* (Dover Publications Inc., New York, 1997), Sec. 3.5.
- [3] S.-Y. Kim and B. Hu, *Phys. Rev. A* **44**, 934 (1991); S.-Y. Kim and D.-S. Lee, *Phys. Rev. A* **45**, 5480 (1992).
- [4] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983), Sec. 3.5.
- [5] U. Parlitz, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3**, 703 (1993) and references therein.