Lorenz 방정식에서의 이상한 끌개

문준영, 임지영

Lorenz 방정식에서 매개변수 r값을 변화시키면서 동역학을 공부했다. 매개변수 r을 0에서부터 증가시켜 나갈 때, Lorenz계가 처음에는 원점인 부동점(fixed point)으로 끌려가게 된다. 그러나, r값이 1을 지나면서 원점 부동점은 초임계 갈퀴 쌍갈림(supercritical pitchfork bifurcation)으로 불안정해지며, 새로운 한쌍의 안정된 부동점 C^+와 C^-가 나타난다. 이러한 부동점 C^+와 C^-도 r값이 어떤 임계값 r_H를 지날 때 버금임계 홉프 쌍갈림(subcritical hopf bifurcation)을 통해서 안정성을 잃어버리게 된다. 그리고, $r > r_H$에서 Lorenz계는 부동점들과는 기하학적으로 매우 다른 나비모양의 이상한 끌개로 끌려가게 된다. 이러한 이상한 끌개에서의 운동은 초기조건에 매우 민감해서 장기예측이 불가능하다.

Ⅰ. 서론

Lorenz는 기상학자이며 수학자이다. 그는 지구대기의 수학적 운동 모델에 관심을 갖고 있었다. 1963년 Lorenz는 B. Saltzman의 연구를 기초로 대류의 운동을 설명하기 위해 Navier-Stokes의 방정식에서 핵심과 관계없는 항들을 제거하여 세 개의 상미분 방정식으로 구성된 동역학계로 간단하게 표현했다[1,2].

본 논문에서는 Lorenz 방정식에서 매개 변수 값을 $\sigma = 10$, $b = 8/3$으로 고정시키고 r값을 증가 시켜 나가면서 나타나는 끌개들을 공부했다.

Ⅱ. Lorenz 방정식

Lorenz 방정식의 기초가 된 것은 대기에서의 특정한 유체운동이다. Lorenz는 이것을 수학적으로 설명하기 위해 Navier-Stokes의 방정식에서 출발했으며 핵심과 관계없는 항들을 제거하여 세 개의 상미분 방정식으로 구성된 동역학계로 단순화 시켰다[2]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \qquad (1) \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$

여기서 Lorenz는 대기의 상태를 변수 x, y, z로 나타냈다. 매개변수 σ, r, b는 0보다 크며, σ는 운동점성계수(prandtl number)를 말하고, r 은 Rayleigh 계수이다[2].

Lorenz 방정식은 2개의 비선형 항인 xy, xz 가 있다. 이 두 개의 비선형 항으로 Lorenz 방정식은 비선형성을 나타낸다. 또한 Lorenz 방정식에서 (x, y)항에 (-x, -y)를 넣어도 그 값이 같다. 그것은 (x(t), y(t), z(t)) = (-x(t), -y(t), z(t))이며 대칭성이 존재한다는 것을 보여준다[3]. 그리고, Lorenz 방정식은 감쇠계(dissipative system)로 부피수축(volume contraction)이 일어난다. 부피수축현상이 일어나기 때문에 Lorenz 방정식에서 끌개가 존재한다.

Ⅲ. Lorenz 방정식에서의 끌개들

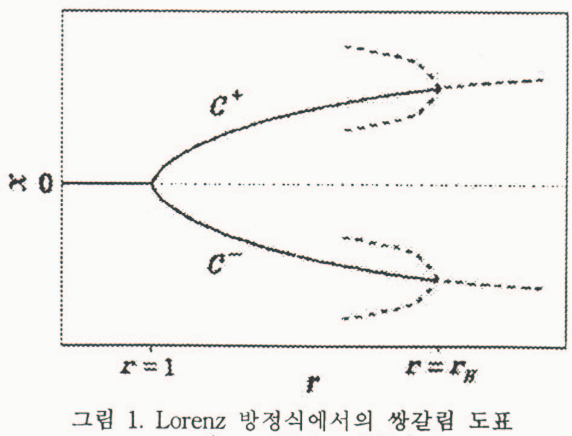

그림 1. Lorenz 방정식에서의 쌍갈림 도표
(σ = 10, b = 8/3)

Lorenz 방정식에서 매개변수 σ와 b를 각각 $\sigma = 10$, $b = 8/3$로 고정시키고 r값을 0에서부터 증가시켜 나가면, 처음에는 원점인 부동점(fixed point)로 끌려 들어가게 된다. 여기서 그림 2는 r값을 0.5로 하여 변수 x값을 시간에 따라 그렸을 때 그 값이 원점인 부동점으로 끌려 들어가는 것을 나타낸다. 그러나 r값이 1을 지나면서 초임계 갈퀴 쌍갈림(supercritical pitchfork bifurcation)을 통해 원점인 부동점은 안정성을 잃어버리고, 새로운 한쌍의 안정된 부동점 C^+, C^-가 나타난다. 그림 3은 r값을 11로 놓았을 때 안정된 부동점인 C^+로 끌려 들어가는 것을 나타낸다. 이러한 C^+, C^-도 r값이 r_H를 지나면서 버금임계 홉프 쌍갈림(subcritical hopf bifurcation)으로 인해 안정을 잃어버린다. 그림 4는 임계값 r_H를 지난 후인 $r = 28$일 때 시간에 따른 변수 x값이 어느 한 점으로도 끌려 들어가지 않고 비주기적인 형태로 나타난다. 그리고 $r > r_H$에서 Lorenz 계는 부동점들과는 기하학적으로 그 형태가 매우 다른 나비모양의 이상한 끌개로 끌려 들어간다. 그 모양은 초기 상태에서 출발하여 한동안 시계방향으로 회전하다가 잠시 동안 시계반대 방향으로 움직이는 형태를 하고 있다. 이것은 순수한 무질서를 나타냈으며, 정교한 기하학적 구조로 새로운 질서를 보여 주었다. 그리고, 이러한 이상한 끌개에서의 운동은 초기조건에 매우 민감해서 장기 예측이 불가능하다.

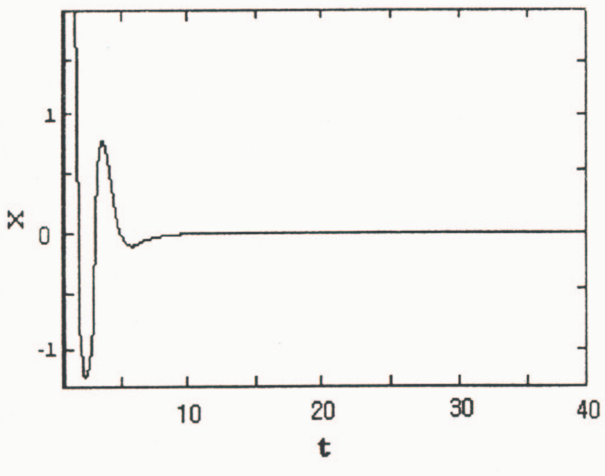

그림 2. Time Series (r = 0.5)

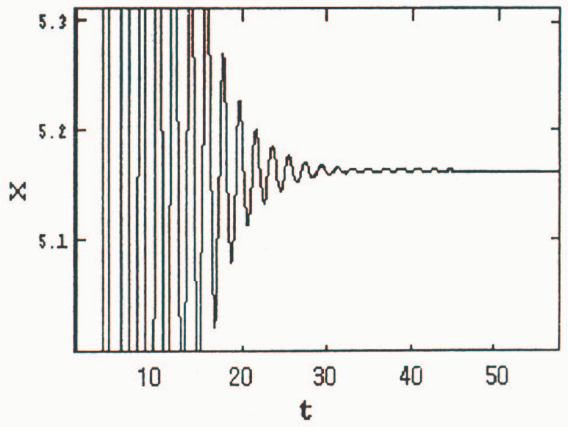

그림 3. Time Series (r = 11)

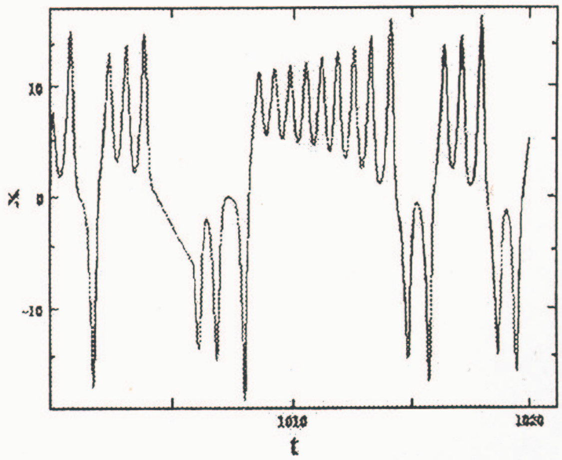

그림 4. Time Series (r = 28)

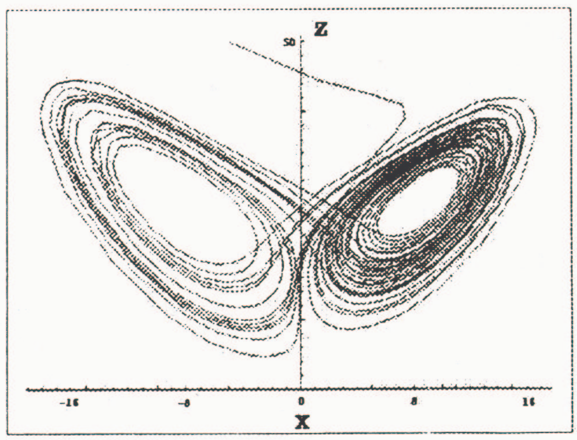

그림 5. Lorenz의 이상한 끌개 (σ =10, b= 8/3, r=28)

Ⅳ. 결론

매개변수 r을 0에서부터 증가시켜 나갈 때, Lorenz계가 처음에는 원점인 부동점(fixed point)으로 끌려가게 된다. 그러나, r값이 1을 지나면서 원점 부동점은 초임계 갈퀴 쌍갈림으로 불안정해지고 새로운 한쌍의 안정된 부동점 C^+와 C^-가 나타났다. 이러한 부동점 C^+와 C^-도 r값이 임계값 r_H를 지날 때 버금임계 홉프 쌍갈림을 통해서 안정성을 잃어버리게 된다. 그리고, $r > r_H$에서 Lorenz계는 부동점들과는 기하학적으로 매우 다른 나비모양의 이상한 끌개로 끌려가게 되는데 이것이 Lorenz가 발견한 Lorenz 끌개이다. 이 이상한 Lorenz 끌개에서의 운동은 초기조건에 매우 민감해서 장기예측이 불가능하다. 그런 이유로 이 Lorenz의 이상한 끌개는 현재까지도 많은 관심이 되고 있으며 많은 물리학자들이 연구를 하고 있다.

Ⅴ. 참고문헌

[1] E.N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," Journal of the Atmospheric Science 20, 130 (1963).

[2] S.H Kellert, *카오스란 무엇인가* (범양사, 서울, 1995), p. 32, 36.

[3] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison Wesley, New York, 1994), pp. 311-318.