

흔돈 동기화를 잃어 가는 과정에 대한 맷음변수 어긋남과 잡음 효과

임우창 · 김상윤*

강원대학교 물리학과, 춘천 200-701

(2001년 11월 30일 받음)

단방향으로 결합된 일차원 본뜨기에서 흔돈 동기화를 잃어 가는 과정에 대한 맷음변수 어긋남과 잡음 효과를 수치적으로 연구했다. 동기화된 흔돈끌개는 자신 속에 박혀 있는 불안정한 주기궤도의 첫번째 가로쌍갈림을 통해서 약하게 안정한 상태로 바뀌게 된다. 그리고, 약하게 안정한 동기화된 흔돈끌개는 작은 맷음변수 어긋남이나 잡음효과로 인해서 거품일기 끌개(bubbling attractor)나 과도적인 흔돈끌개(transient chaotic attractor)로 바뀌게 된다. 이 경우에 거품일기 끌개와 과도적인 흔돈끌개를 각각 특성화짓는 평균 파열사이 간격(interburst interval)과 평균 수명이 관심있는 양이다. 이러한 양들은 어긋남 맷음변수와 잡음세기에 대해서 각각 축척거동을 보일 뿐만 아니라 같은 축척 결과를 보임을 발견했다.

PACS numbers: 05.45.xt

Keywords: 흔돈 동기화, 맷음변수 어긋남, 잡음

많은 동역학계들은 전체 위상공간에서 불변 부분공간(invariant subspace)을 가지고 있다. 예를 들어, 흔돈 진동자의 동기화 경우에는 불변 동기화선(invariant synchronization line)이 존재한다 [1-4]. 이러한 흔돈동기화는 특히 비밀통신과 같이 실용적인 분야에 응용할 수 있기 때문에 상당한 관심을 끌고 있다 [5].

불변 동기화선 위에 있는 동기화된 흔돈끌개는 불변 동기화선을 가로지르는 방향으로의 섭동에 대해 안정할 때 전체 위상공간에서 끌개가 된다. 이러한 동기화된 흔돈끌개의 가로안정성은 자신에 묻혀 있는 불안정한 주기 궤도들의 가로안정성과 관계가 있다 [6-12]. 모든 주기 궤도들이 가로방향으로 안정할 때, 동기화된 흔돈끌개는 점근적으로 안정하게 되고, “강한 동기화”가 일어나게 된다. 그러나, 결합맷음변수가 어떤 문턱값을 지나게 되면, 맨 처음으로 어떤 주기 궤도가 국소 쌍갈림을 통해 가로방향으로 불안정해진다. 이러한 첫번째 가로쌍갈림의 결과로 가로방향으로 불안정한 주기 궤도와 그 것의 preimage들 근처를 지나는 궤도는 불변 동기화선으로부터 국소적으로 밀쳐지게 된다. 따라서, 이러한 첫번째 가로쌍갈림을 통해 강한 동기화가 파괴되고, “약한 동기화” 상태가 시작된다. 약하게 안정한 동기화된 흔돈끌개 위의 전형적인 궤도는 평균 가로 리아브노프 지수 (Lyapunov exponent)가 음이지만, 국소 가로 리아

프노프지수가 양인 부분을 갖게 된다. 이 경우에 흡수 지역(absorbing area)의 존재 유무에 따라 간헐적인 파열(bursting)이나 끌림유역(basin of attraction)의 구멍내기(riddling)가 일어나게 된다 [10-13]. 흡수지역이 존재하면, 불변 동기화선에서 국소적으로 밀쳐진 궤도는 흡수지역 내에 갇히게 되고, 불변 동기화선으로부터 일시적이고 간헐적인 파열 거동을 보이게 된다 [14,15]. 반면에, 흡수지역이 존재하지 않는 경우에는, 국소적으로 밀쳐진 궤도가 다른 끌개나 발산하는 궤도로 끌려가게 된다. 따라서 끌림 유역은 다른 끌개나 발산하는 궤도의 유역에 속하는 구멍들로 빽빽하게 채워지게 된다 [16].

실제계에서는 불변 동기화선을 파괴시키는 두 부분계 사이의 어긋남과 잡음이 항상 존재하게 된다. 따라서, 우리는 불변 동기화 대각선을 가지고 있는 두개의 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기에서 파열과 끌림유역 구멍내기에 대한 맷음변수 어긋남과 잡음 효과를 수치적으로 탐구했다. 파열의 경우에는, 작은 맷음변수 어긋남과 잡음 때문에 거의 동기화된 상태(laminar phase)가 짧은 수명의 파열들에 의해 마구잡이로 끊기는 간헐적인 파열이 지속된다. 이를 끌개 거품일기라고 한다. 반면에 구멍내기의 경우에는 대각선 위의 동기화된 흔돈끌개는 과도적인 흔돈끌개로 바뀌게 된다. 이 두 가지 경우에 전형적인 궤도가 대각선 주위에 머무르는 평균 시간 τ (즉, 평균 파열사이 간격과 과도적인 흔돈끌개의 평균 수명) 이 관심있는 양이다 [15]. 따라서 우리는 이러

*E-mail: sykim@cc.kangwon.ac.kr

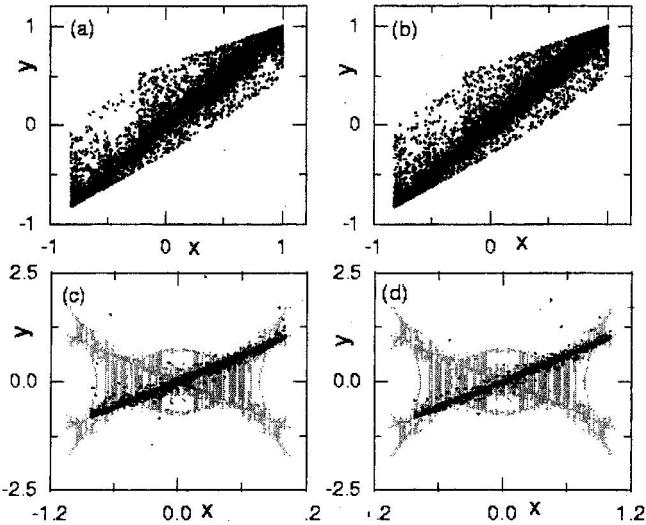


그림 1. $a = 1.82$ 의 경우 약하게 안정한 동기화된 혼돈끌개에 대한 맷음변수 어긋남과 잡음 효과. $c = -0.7$ 에서 (a) 어긋남 맷음변수 ($\varepsilon = 0.001$)와 (b) 잡음 ($\delta = 0.0005$)이 존재하는 경우에 생기는 거품일기 끌개. $c = -2.91$ 에서 구멍내기 경우에 발산하는 유역에 속하는 구멍들로 빠삐하게 채워진 유역(회색지역)을 가진 약하게 안정한 동기화된 끌개는 (c) 어긋남 맷음변수 ($\varepsilon = 0.001$)와 (d) 잡음 ($\delta = 0.0005$)이 존재하는 경우에 과도적인 혼돈끌개(검은 점들)로 바뀌게 된다.

한 τ 가 어긋남 맷음변수 ε 과 잡음 세기 δ 에 대해서 어떤 축척거동을 보이는가를 공부했다. 첫번째 가로쌍갈림점 근처에서 τ 는 ε (δ)가 0으로 감에 따라, ε^{-1} (δ^{-1})의 어떤 거급제곱보다 더 빨리 증가한다. 그러나, 교차영역을 지나고 나면, τ 는 거듭제곱 법칙(power-law) 축척거동을 보인다. 그리고, 결합매개변수가 폭발쌍갈림(blow-out bifurcation) 점으로 접근해 갈수록, τ 가 짧아지기 때문에 축척지수(scaling exponent)는 점점 작아진다. 게다가 맷음 변수 어긋남과 잡음이 존재하는 두 경우가 거의 같은 축척지수값을 갖는 축척거동을 보인다. 따라서, 맷음변수 어긋남과 잡음의 효과가 정량적으로 거의 같게 된다.

우리는 단방향으로 결합된 1차원 본뜨기에서 약한 동기화의 경우에 대해 맷음변수 어긋남과 잡음 효과를 공부했다 [11]:

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, a) + \delta \xi_n^{(1)}, \\ y_{n+1} = f(y_n, b) + c g(y_n, x_n) + \delta \xi_n^{(2)}, \end{cases} \quad (1)$$

여기서 x_n 과 y_n 은 이산 시간 n 에서의 두 부분계의 상태 변수들이고, 각 부분계의 동역학은 맷음변수 p 로 조절되는 1차원 본뜨기 $f(x, p) = 1 - p x^2$ 에 의해서 지배되고, c 는 두 부분계 사이의 결합매개변수이며, $g(x, y)$ 는

$$g(x, y) = y^2 - x^2 \quad (2)$$

와 같은 형태의 결합함수이다. 또한 첫번째 부분계는 두 번째 부분계(반응계)에 대해서 구동계로서 역할을 함에 주시하자. 동일한 1차원 본뜨기의 경우(즉, $a = b$)에는 $x - y$ 위상공간에 불변 동기화선 $y = x$ 가 존재한다. 두 부분계 사이의 어긋남이 있으면, 대각선은 더 이상 불변 동기화선이 아니다. 이러한 어긋남의 효과를 살펴보기 위해서 식 (1)의 결합 1차원 본뜨기에

$$b = a - \varepsilon \quad (3)$$

와 같이 작은 어긋남 맷음변수 ε 를 도입했다. 그리고, 잡음 효과를 살펴보기 위해 첨가 마구잡이 잡음(additive random noise)을 식 (1)에 추가하였다. 이 때, $\xi_n^{(1)}$ 와 $\xi_n^{(2)}$ 는 평균값이 0이고, 분산값이 1인 균일한 분포(uniform distribution)에서 마구잡이로 취한 독립적인 난수이다. 그리고, δ 는 마구잡이 잡음의 세기를 조절하는 맷음변수이다.

예로 $a = 1.82$ 이고 $\varepsilon = \delta = 0$ 일 때 $c_{b,l} [\simeq -2.963] < c < c_{b,r} [\simeq -0.677]$ 의 구간에 존재하는 동기화된 혼돈끌개를 생각하자. 결합매개변수 c 가 $c_{b,l}$ 이나 $c_{b,r}$ 를 통과하면, 동기화된 혼돈끌개는 폭발쌍갈림을 통해 가로방향으로 불안정해진다. 그리고 나면, 완전 비동기화가 일어난다. 동기화된 혼돈끌개에 박혀 있는 모든 주기궤도가 가로방향으로 안정한 $c_{t,l} [= -2.789\,372] < c < c_{t,r} [= -0.850\,625]$ 의 구간에서는 강한 동기화가 일어난다. 그러나, 결합매개변수 c 가 $c_{t,r}$ 나 $c_{t,l}$ 를 통과할 때, 동기화된 혼돈끌개 안에 박혀 있는 어떤 주기 안장(periodic saddle)의 첫번째 가로쌍갈림을 통해서 거품일기 또는 구멍내기 전이가 일어난다. 그 결과로 동기화된 혼돈끌개는 그 안에 박혀 있는 주기 밀개의 국소적인 가로밀침 때문에 약하게 안정되어진다. 흡수지역이 있는 경우에는 그림 1(a)와 (b)에서 나타나 있는 것처럼 어긋남 맷음변수와 잡음이 아무리 작더라도 거품일기 영역 ($c_{t,r} < c < c_{b,r}$)에서는 끌개거품일기라고 불리우는 간헐적인 파열이 지속된다. 반면에 구멍내기 영역 ($c_{b,l} < c < c_{t,l}$)에서 구멍뚫린 끌림유역을 갖고 있는 약하게 안정된 동기화된 혼돈끌개는 국소적인 파열을 가둬두는 흡수지역이 없기 때문에 그림 1(c)와 1(d)가 보여주는 것과 같이 유한한 수명을 가진 과도기적 혼돈끌개로 변하게 된다. 이 두 경우에 전형적인 궤도가 대각선 근처에서 보내는 평균 시간 τ (즉, 거품일기 끌개의 평균 파열사이 간격과 과도기적 혼돈끌개의 평균 수명 시간)에 관심이 있다. 따라서 우리는 τ 가 어긋남 맷음변수 ε 과 잡음 세기 δ 에 대해서 어떤 축척거동을 보이는가를 연구했다.

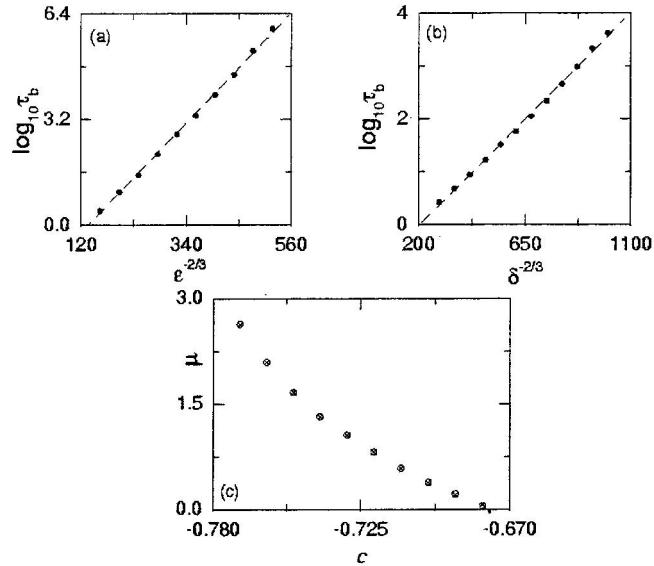


그림 2. $c = -0.82$ 에서 $\log_{10} \tau_b$ 대 (a) $\varepsilon^{-2/3}$ 와 (b) $\delta^{-2/3}$ 그래프. 평균 파열사이 간격 τ_b 는 초거듭제곱 법칙을 잘 만족한다. (a)와 (b)에서 맞춰진 기울기는 각각 $\eta_p = 0.036$ 과 $\eta_n = 0.0049$ 이다. 교차지역을 통과한 후에는, τ_b 는 거듭제곱 축척거동을 보인다. 어긋남 맷음변수와 잡음이 존재하는 경우에서 축척지수 μ_p (열린 원들)과 μ_n (x들) 대 c 에 대한 그래프는 (c)에 나타나 있다.

먼저 끌개거품일기의 경우를 고려해보자. c 가 $c_{t,r}$ 을 통과하면, 첫번째 가로쌍갈림인 동기화된 혼돈끌개에 포함되어 있는 안장 고정점의 초임계 주기배가 쌍갈림을 통해 거품일기 전이가 일어난다 [11]. 이 경우, 대각선으로부터의 파열은 동기화로부터의 편차를 나타내는 가로변수

$$u_n = x_n - y_n \quad (4)$$

로 표현될 수 있다. 거품일기 끌개는 대각선으로부터의 편차가 문턱값 u_b^* 보다 작은 경우(즉, $|u_n| < u_b^*$)에는 라미나 상(laminar phase)에, 큰 경우에는 파열상(bursting phase)에 있게 된다. 여기에서 u_b^* 은 최대 파열진폭 u_{\max}^* 보다 상당히 작은 값이다(즉, $u_b^* \ll u_{\max}^*$).

c 를 고정시키고, 어긋남 맷음변수 ε 이나 잡음 세기 δ 를 감소시키면서 평균 라미나 길이 τ_b (즉, 평균 파열사이 간격)를 계산하였다. 각 ε 이나 δ 값에 대해서 문턱값은 $u_b^* = 0.001$ 으로 하고, 초기조건 $(0,0)$ 에서 출발하여 50,000개의 라미나상을 얻을 때까지 궤도를 쫓아가서, 다음과 같은 축척거동을 보임을 발견했다. $c_{t,r}$ 을 바로 지난 경우, ε 이나 δ 에 대한 τ_b 의 축척거동은 참고문헌 [7]과 [17]에서 이론적으로 다음과 같이 보여졌다:

$$\tau_b \sim \varepsilon^{\eta_p \varepsilon^{-\alpha_p}}, \quad \tau_b \sim \delta^{\eta_n \delta^{-\alpha_n}}. \quad (5)$$

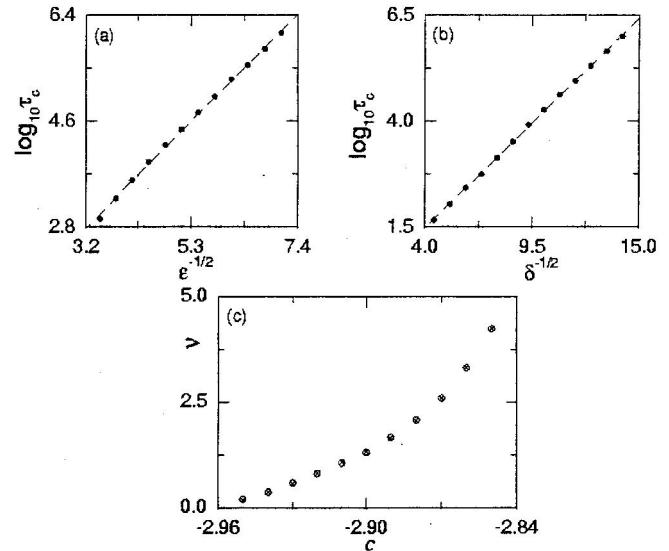


그림 3. $c = -2.795$ 에서 $\log_{10} \tau_c$ 대 (a) $\varepsilon^{-1/2}$ 와 (b) $\delta^{-1/2}$ 의 그래프. 과도적인 혼돈끌개의 평균 수명은 초거듭제곱 법칙 축척을 잘 만족한다. (a)와 (b)에서 맞춰진 기울기는 각각 $\zeta_p = 1.944$ 와 $\zeta_n = 0.435$ 이다. 교차지역을 통과한 후에는, τ_c 는 거듭제곱 법칙 축척을 보인다. 맷음변수 어긋남과 잡음이 존재하는 경우에 축척지수 ν_p (열린 원들)와 ν_n (x들) 대 c 에 대한 그래프는 (c)에 나타나 있다.

여기서 축척지수 α 는 파열변수 u_n 의 전개방정식(evolution equation)의 주된 비선형항(leading nonlinear term)에 관계된다. 주기배가 쌍갈림의 경우 주된 비선형항이 3차이기 때문에 축척지수 α_p 와 α_n 는 $2/3$ 가 되며, 축척상수 η_p 와 η_n 는 수치맞춤(numerical fitting)에 의해서 결정되는 양의 상수이다. 그림 2(a)와 (b)는 각각 $c = -0.82$ 인 경우에 $\log_{10} \tau_b$ 대 $\varepsilon^{-2/3}$ 와 $\delta^{-2/3}$ 의 그래프를 나타낸다. 각각의 그래프가 식 (5)를 따르는 일차함수로 잘 맞춰짐에 주시하자. ε 나 δ 가 감소함에 따라, 평균 파열사이 간격 τ_b 는 ε^{-1} 나 δ^{-1} 의 어떤 거듭제곱보다 빠르게 증가한다. 따라서, $c = c_{t,r}$ 근처에서 τ_b 는 초거듭제곱 법칙(superpower-law) 축척거동을 보이게 되므로 상당히 길게 된다.

c 를 더 증가시켜가면, 교차영역 $-0.79 \lesssim c \lesssim -0.78$ 를 통과하게 되고, 초거듭제곱 법칙에서 거듭제곱 법칙 축척거동으로의 변환이 일어난다. 따라서, $c \gtrsim -0.78$ 인 경우에 평균 파열사이 간격 τ_b 는 ε 나 δ 에 대해

$$\tau_b \sim \varepsilon^{-\mu_p}, \quad \tau_b \sim \delta^{-\mu_n} \quad (6)$$

와 같은 축척거동을 보인다 [18]. 여기서 μ_p 와 μ_n 는 각각 맷음변수 어긋남과 잡음에 대한 축척지수이다. $\log_{10} \tau_b$ 를 $\log_{10} \varepsilon$ 이나 $\log_{10} \delta$ 에 대해서 그래프를 그리면, 그 기울기가 바로 축척지수 μ_p 나 μ_n 이 된다. 그림 2(c)는

c 를 $c = -0.77$ 에서 $c = -0.68$ 까지 바꾸어 가면서 얻은 축척지수 μ_p (열린 원으로 표현됨)와 μ_n (\times 로 표현됨)를 나타낸 것이다. μ_p 와 μ_n 의 값이 거의 같음에 주시하자. 따라서, 수치적인 정확도 안에서 맷음변수 어긋남과 잡음에 대한 축척결과는 같음을 알 수 있다. c 를 폭발쌍갈림점 $c_{b,r}$ 으로 증가시켜 갈수록, μ 는 점점 작아진다. 따라서 평균 파열사이 간격은 점점 짧아지게 된다.

지금부터는 과도적인 혼돈끌개의 경우를 살펴보기로 하자. c 가 $c_{t,l}$ 을 지나면서, 동기화된 혼돈끌개에 박혀있는 안장고정점(saddle fixed point)의 관통임계 접촉(transcritical contact) 쌍갈림을 통해 구멍내기 전이가 일어난다 [11]. 이 경우에 맷음변수 어긋남이나 잡음으로 인해 구멍난 유역을 갖고 있는 동기화된 혼돈끌개는 국소적으로 밀쳐지는 궤도를 가둬줄 흡수지역이 없기 때문에 유한 시간의 수명을 갖고 있는 과도적인 혼돈끌개로 바뀌게 된다. 주어진 c 에 대해서, 어긋남 맷음변수 ε 이나 잡음세기 δ 를 감소시켜가며 다음과 같이 평균 수명 τ_c 를 계산하였다. 각 ε 나 δ 에 대해, 대각선 $y = x$ 위에 $x \in (1-a, 1)$ 영역에서 마구잡이로 1,000개의 초기값을 선택한다. 이러한 초기값에서 시작한 궤도의 y 값이 10보다 크게되면 동기화된 혼돈끌개의 끌림 유역 밖에 있기 때문에 발산한다고 판단한다. 이를 통해 ε 나 δ 에 대한 τ_c 를 얻는다. $c_{t,l}$ 을 바로 지난 경우, τ_c 는 ε 나 δ 에 대해 초거듭제곱 법칙 축척거동을 보인다:

$$\tau_c \sim e^{\zeta_p \varepsilon^{-\beta_p}} \quad \tau_c \sim e^{\zeta_n \delta^{-\beta_n}}. \quad (7)$$

그림 3(a)와 (b)는 $c = -2.795$ 인 경우의 예를 보여준다. 관통임계 쌍갈림의 경우, u_n 의 전개방정식의 주된 비선형항은 거품일기의 경우가 3차였던 것과는 달리 2차가 된다. 따라서, 맷음변수 어긋남이나 잡음의 경우 축척지수 β_p 와 β_n 는 $1/2$ 이 되고 [7,11,17], 축척상수 ζ_p 와 ζ_n 은 수치맞춤을 통해서 결정된 양의 상수이다. 결과적으로, $c = c_{t,l}$ 근처에서는 ε 나 δ 가 0으로 감소함에 따라 τ_c 가 ε^{-1} 이나 δ^{-1} 의 어떤 거듭제곱보다도 빨리 증가한다. 따라서 상당히 긴 수명을 갖는 과도적인 혼돈끌개가 존재하게 된다.

c 가 더 감소함에 따라, $-2.84 \lesssim c \lesssim -2.81$ 의 교차영역을 통과하면서 초거듭제곱 법칙에서 거듭제곱 법칙 축척거동으로의 변환이 일어난다. 따라서, $c \lesssim -2.84$ 의 경우에 평균수명 τ_c 는 ε 나 δ 에 대해

$$\tau_c \sim \varepsilon^{-\nu_p} \quad \tau_c \sim \delta^{-\nu_n} \quad (8)$$

와 같은 축척거동을 보인다. 이 때 ν_p 와 ν_n 는 각각 맷음변수 어긋남과 잡음에 대한 축척지수이다. $\log_{10} \tau_c$ 을

$\log_{10} \varepsilon$ 이나 $\log_{10} \delta$ 에 대해서 그래프를 그리면, 그 기울기가 바로 축척지수 ν_p 나 ν_n 가 된다. 그럼 3(c)는 $-2.95 \leq c \leq -2.85$ 구간에서 ν_p (열린 원으로 표현됨)와 ν_n (\times 로 표현됨)을 보여주고 있다. 두 축척지수 ν_p 와 ν_n 의 값이 거의 같음에 주시하자. 끌개 거품일기의 경우와 마찬가지로 (수치적인 정확도 안에서) 맷음변수 어긋남이나 잡음의 축척결과는 같다. 폭발쌍갈림점 $c_{b,l}$ 로 c 를 증가시켜감에 따라, ν 은 점점 작아진다. 따라서 평균 수명은 점점 짧아지게 된다.

요약하면, 우리는 거품일기와 유역 구멍내기 경우에 대해 맷음변수 어긋남과 잡음 효과를 수치적으로 공부했다. 맷음변수 어긋남이나 잡음이 항상 존재하는 실제 경우에 약하게 안정한 동기화된 혼돈끌개는 대국적인 동역학을 결정하는 흡수지역의 존재에 따라 거품일기 끌개나 과도적인 혼돈끌개로 바뀐다. 우리는 거품일기 끌개의 평균 파열사이 간격과 과도적인 혼돈끌개의 평균 수명이 어긋남 맷음변수 ε 과 잡음 세기 δ 에 대해 어떠한 축척거동을 보이는지 결합매개변수 c 를 바꾸면서 살펴보았다. 첫번째 가로쌍갈림 바로 직후에서는 그러한 평균 시간 τ 는 ε 과 δ 가 0으로 갈 수록 거듭제곱 법칙 축척거동보다 빨리 증가하는 초거듭제곱 법칙 축척거동을 보인다. 그러나, 교차영역을 통과한 후에 τ 는 거듭제곱 법칙 축척거동을 보인다. 게다가, 맷음변수 어긋남과 잡음의 경우에 대한 축척지수는 거의 같았다. 따라서, 이 두 경우에 정량적으로 거의 같은 축척거동을 보임을 알 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2001년도 강원대학교 기성회 일반연구비에 의하여 연구되었다.

참 고 문 현

- [1] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. **69**, 32 (1983).
- [2] A. S. Pikovsky, Z. Phys. B: Condens. Matter **50**, 149 (1984).
- [3] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev and M. I. Rabinovich, Radiophys. Quantum Electron. **29** 795 (1986).
- [4] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. **64**, 821 (1990).

- [5] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, Phys. Rev. Lett. **71**, 65 (1993); L. Kocarev, K. S. Halle, K. Eckert, L. O. Chua and U. Parlitz, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **2**, 973 (1992); L. Kocarev and U. Parlitz, Phys. Rev. Lett. **74**, 5028 (1995); N. F. Rulkov, Chaos **6**, 262 (1996).
- [6] P. Ashwin, J. Buescu and I. Stewart, Nonlinearity **9**, 703 (1996).
- [7] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke and S. C. Venkataramani, Phys. Rev. Lett. **77**, 55 (1996).
- [8] V. Astakhov, A. Shabunin, T. Kapitaniak and V. Anishchenko, Phys. Rev. Lett. **79**, 1014 (1997).
- [9] Yu. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich and E. Mosekilde, Phys. Rev. E **57**, 2713 (1998); **60**, 2817 (1999). O. Popovych, Yu. L. Maistrenko, E. Moskilde, A. Pikovsky and J. Kurths, Phys. Lett. A **275**, 401 (2000); Phys. Rev. E **63**, 036201 (2001).
- [10] Yu. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich and E. Mosekilde, Phys. Rev. Lett. **80**, 1638 (1998). G.-I. Bischi and L. Gardini, Phys. Rev. E **58**, 5710 (1998).
- [11] S.-Y. Kim and W. Lim, Phys. Rev. E **63**, 026217 (2001). S.-Y. Kim, W. Lim and Y. Kim, Prog. Theor. Phys. **105**, 187 (2001).
- [12] S.-Y. Kim and W. Lim, Phys. Rev. E **64**, 016211 (2001).
- [13] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola and J.-C. Cathala, *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps* (World Scientific, Singapore, 1996); R. H. Abraham, L. Gardini and C. Mira, *Chaos in Discrete Dynamical systems* (Springer, New York, 1997).
- [14] P. Ashwin, J. Buescu and I. Stewart, Phys. Lett. A **193**, 126 (1994); J. F. Heagy, T. L. Carroll and L. M. Pecora, Phys. Rev. E **52**, 1253 (1995); S. C. Venkataramani, B. R. Hunt, E. Ott, D. J. Gauthier and J. C. Bienfang, Phys. Rev. Lett. **77**, 5361 (1996).
- [15] S. C. Venkataramani, B. R. Hunt and E. Ott, Phys. Rev. E **54**, 1346 (1996).
- [16] J. C. Alexander, J. A. Yorke, Z. You and I. Kan, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **2**, 795 (1992). E. Ott, J. C. Sommerer, J. C. Alexander, I. Kan and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **71**, 4134 (1993); J. C. Sommerer and E. Ott, Nature (London) **365**, 136 (1993); E. Ott, J. C. Alexander, I. Kan, J. C. Sommerer and J. A. Yorke, Physica D **76**, 384 (1994); J. F. Heagy, T. L. Carroll and L. M. Pecora, Phys. Rev. Lett. **73**, 3528 (1994).
- [17] C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **50**, 935 (1983); Erg. Th. Dyna. Sys. **5**, 341 (1985).
- [18] E. Ott, J. C. Sommerer, J. C. Alexander, I. Kan and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **71**, 4134 (1993); E. Ott, J. C. Alexander, I. Kan, J. C. Sommerer and J. A. Yorke, Physica D **76**, 384 (1994).

Effect of Parameter Mismatch and Noise on the Loss of Chaos Synchronization

Woochang LIM and Sang-Yoon KIM

Department of Physics, Kangwon National University, Chunchon 200-701

(Received 30 November 2001)

We numerically investigate the effect of parameter mismatch and noise on the loss of chaos synchronization in unidirectionally coupled one-dimensional maps. Through a first transverse bifurcation of an unstable periodic orbit embedded in a synchronous chaotic attractor (SCA), the SCA becomes weakly stable. In the region of weak synchronization, any small parameter mismatch and any noise will transform the SCA into a bubbling attractor or a chaotic transient. For this case, the quantities of interest are the average interburst interval of the bubbling attractor and the average lifetime of the chaotic transient. They are found to scale with the mismatched parameter and the noise intensity. Furthermore, the scaling results for both the case of a parameter mismatch and the case of noise are quantitatively the same.

PACS numbers: 05.45.xt

Keywords: Chaos Synchronization, Parameter Mismatch, Noise